様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ４ 月 ２７ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１０２

研究課題名（和文）パンルヴェ系・超幾何系・力学系

研究課題名（英文）Painleve systems, hypergeometric systems and dynamical systems

研究代表者
岩崎　克則（Iwasaki, Katsunori）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：００１７６５３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：超幾何方程式は、超幾何関数と呼ばれる重要な関数を解とする線形微分方程式である。一方、パンルヴェ方程式は、ある意味で超幾何方程式の非線形化と見なされる微分方程式であるが、非線形性の故に、その研究には力学系的な手法が必要となる。そこでパンルヴェ方程式に関しては、軌道体上のハミルトン力学系的な観点から相空間の構成や幾何学的特徴づけを行った。また周期解についても考察した。超幾何関数については、特殊値公式、特にガンマ乗積表示に注目し、そのような公式が存在するための算術的な必要条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：Hypergeometric equations are linear differential equations solved by an important class of functions called hypergeometric functions, while in certain sense Painleve equations may be thought of as nonlinear analogues of hypergeometric equations. Because of their nonlinearity, the study of Painleve equations requires various methods from dynamical systems. We constructed the phase space of a Painleve equation and gave a geometric characterization of it as an orbifold Hamiltonian dynamical system. We also discussed periodic solutions to another Painleve equation. As for hypergeometric functions we focused our attention on spacial-value formulas, especially on gamma product formulas, and obtained necessary conditions of arithmetic flavor for the existence of such formulas.

研究分野：複素領域の微分方程式

キーワード：パンルヴェ方程式　超幾何関数　力学系　ハミルトン構造　周期解　ガンマ乗積表示　隣接関係式　対称性

１．研究開始当初の背景

研究課題名は「パンルヴェ系・超幾何系・力学系」であるが、線形から非線型への流れに沿って、超幾何系から説明を始める。

（１）　超幾何系について

超幾何関数は、数学や数理物理学においてしばしば登場する重要な関数であり、さまざまな特殊関数や直交多項式を含んでいる。その古典的な研究は、オイラー、ガウスに始まり、クンマー、リーマンと続いていく。その後も多くの研究が行われ、現在ではさまざまな一般化（高階化・多変数化・差分化）が行われており、大きな世界を形成している。これらを総称して超幾何系と呼ぶ。この分野は、複素領域における微分方程式論、代数解析、漸近解析、表現論等とも密接に関係している。

（２）　パンルヴェ系について

パンルヴェ方程式の発見は、二十世紀の初頭に行われた。パンルヴェ方程式は、解軌道が有理型関数として大域的に解析接続可能であるという性質（パンルヴェ性）と、複素線形微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する微分方程式であるという二つの特徴を持っている。発見以来一世紀余りの歳月が流れたが、その間、パンルヴェ方程式の方も、さまざまな一般化（高階化・多変数化・差分化）が行われ、現在ではパンルヴェ系と呼ぶべき多様な世界を形成している。パンルヴェ系は、いろいろな側面から、超幾何系の非線形化であると見なされている。しかし、両者には異なる側面もたくさんある。

（３）　力学系について

超幾何関数を定義する超幾何微分方程式が線形の世界に属するのに対して、パンルヴェ方程式やその一般化は非線形の世界に属している。線形系である超幾何方程式の解空間は線形空間であり，その幾何学的構造は単純簡明であるが、非線形系であるパンルヴェ方程式の解空間（相空間）は幾何学的に非自明である。特にパンルヴェ系はハミルトン系としての特性を持つので、相空間の理解においては、シンプレクティック幾何学やハミルトン力学系的な観点が必要となる。

また解の大域的挙動も、線形系の超幾何系が線形モノドロミーで捉えられるのに対して（これ自身簡単なことではないが）、パンルヴェ系の大域挙動は、非線形性を反映してより複雑になる。実際、研究代表者と連携研究者の以前の共同研究により、パンルヴェ第 VI 方程式の非初等的ループ（大部分のループがこれにあたる）に沿う非線型モノドロミー写像のエントロピーは正となり、カオス的特性を持つことが明らかになった。そこでは、代数曲面上のエルゴード理論が使われている。これは線形の超幾何系には見られない特徴であった。この研究からも分るように、パンルヴェ系に対しては、力学系的な視点に立つ研究が必要となる。

（４）　相互の関係性について

超幾何系については、線形性のおかげで利用できる手法が多様にある。それらを用いて以前にはなかった新しい側面を開拓する。パンルヴェ系については、超幾何系との類似性にも留意しつつ、力学系や葉層構造の視点に立つ研究を行う。また関連する力学系の研究として、有理曲面上の自己同型について考察する。これらが、研究開始当初における背景であった。

２．研究の目的

（１）パンルヴェ系・力学系の研究

第 I 型から第 VI 型までの全てのパンルヴェ方程式の相空間は、解軌道のなす葉層構造の特異点解消の観点から、ヒルツェブルフ曲面のブローアップの反復合成により構成された（1970 年代末期)。その後、第 II 型から第 VI 型までのパンルヴェ方程式については、上記の構成に更なる工夫を凝らすことによって、相空間のシンプレクティック・アトラスが構成され、その上の多項式ハミルトン構造の存在が明らかにされた。更に逆に、このような幾何学的構造を持つ唯一のハミルトン系として、パンルヴェ方程式が特徴付けられた（1990 年代後半)。

同様の問題は、パンルヴェ第 I 方程式についても考えられるが、これまで未解決であった。そこで、なぜ従来の方法ではうまくいかなかったのかの理由を突き止め、この問題を解決する。

（２）超幾何系の研究

古典的なテーマに関する新しい方向性の研究を行う。これは、超幾何恒等式、特に超幾何級数の特殊値のガンマ関数による乗積表示公式に関する研究である。

歴史的には、ガウス、クンマーに始まり、現在に至るまで、多くの研究者により数多くの公式が発見されてきた。また、前世紀の終わりごろには、コンピュータおよび計算機代数の発展とあいまって、有限和の場合の超幾何和公式の機械的証明法の研究が大きく進展した。すなわち ゴスパー・アルゴリズムに基づくウィルフ・ザイルバーガー・アルゴリズムやザイルバーガー法等である。

しかし、これまでの研究動向は、できるだけたくさんの特殊値公式を発見することや、発見あるいは予想された公式（特にコンピュータが得意な有限和の場合）の機械的証明法の開発などの方向を向いていた。

我々の研究の目的は、上記とは異なる方向性を志向する。すなわち、超幾何級数の特殊値公式の存在は、一般に極めて稀な現象であり、その稀少性ゆえに貴重な存在となっている。それでは、そもそも、何が特殊値公式の存在をそのように特殊にしているのか、特殊値公式が存在するための拠って立つべき根拠は何か。すなわち、特殊値公式が存在するための（できるだけ精密な）必要条件を求めよ。この素朴な疑問や課題に答えることが本研究の目的である。このような考察は、超幾何系の中で最も基本的なガウスの超幾何関

数の場合でも、これまで殆ど行われていなかった。

３．研究の方法

（１）パンルヴェ系・力学系について

パンルヴェ第Ｉ方程式のハミルトン力学系に関する研究については、大学院生であった岡田 脩と共同研究を行った。パンルヴェ葉層構造の特異点解消を繰り返す試行錯誤の過程で、軌道体構造を入れるという着想を得たことが、研究の進展につながった。

そこで得られた結果は、研究集会「The 16th SNU-HU Joint Symposium」（ソウル国立大学 2013 年 12 月）、「超幾何方程式研究会 2014」(神戸大 2014 年１月)、「第５回ハミルトン系とその周辺」（金沢大学 2014 年５月）等において、研究代表者または岡田が発表を行った。

また、有理曲面上の自己同型の力学系の研究については、連携研究者が行った。

（２）超幾何系について

ガウスの超幾何関数の特殊値公式に関する研究を遂行するために、研究集会「微分方程式の展望」(熊本大学 2014 年 10 月)、RIMS 研究集会「複素領域における微分方程式・その近年の発展」(京都大学 2014 年 11 月)、研究集会「超幾何方程式研究会 2015」（神戸大学 2015 年１月)、「琉球超幾何セミナー」(琉球大学 2015 年２月）等に出席した。それまでに得られた結果を発表するとともに、質疑応答を通して更なる研究の足がかりを得た。

また、勉強型のワークショップ「超幾何学校 2015」（神戸大学 2015 年９月）の講師として「超幾何恒等式をめぐって」と題する連続講義を行い、研究成果の普及に努めた。その講義録(蛭子彰仁記)は現在印刷中である。その概要は、フィリピンにおける研究集会 (2016 年１月)でも発表した。

一方、事業期間の終わり頃 (2015 年 12 月) から、 一般超幾何関数 3F2(1) の連分数表示に関する研究を開始した(蛭子 彰仁と共同)。その過程で 3F2(1) の三項関係式の一般論を作る必要性が生じたため、両者でこれを実行した。この研究は、事業期間終了後も継続していく予定である。

４．研究成果

（１）パンルヴェ系および力学系について

パンルヴェ第Ｉ方程式の相空間とその上のシンプレクティック・アトラスの構成、多項式ハミルトン構造の確立、逆にこの幾何学的構造によるパンルヴェ第Ｉ方程式の一意的な特徴付け等の課題について、次の結果を得た(岡田 脩との共同研究)。

まず、従来のような通常の多様体構造や、それに基づくハミルトン構造を考えていたのでは問題は解決しないとの認識を得た。これは、他型のパンルヴェ方程式の解の動く極が単純なのに対して、パンルヴェ第Ｉ方程式の解では動く極の位数が２位になることと関係している。そのために、相空間の構成のどこかで、あるインヴォルーションに関する軌道体構造を入れることが必要となった。

この考え方に基づき、ヒルツェブルフ曲面の２回ブローアップを行ったところで、ある例外曲線 C の近傍で二重被覆をとり、一回ブローダウンを挟んだ後に、二重被覆のインヴォルーションに関する同変ブローアップを６回行い、更に C の外側と貼り合せた上で、特異点除去のブローアップを１回行うことにより相空間を得た。この手続きにより、相空間上に軌道体としての多項式ハミルトン構造を自然に構成することができた。また逆に、このような軌道体多項式構造をもつ唯一のハミルトン系としてパンルヴェ第Ｉ方程式を特徴付けることができた。これらの結果をまとめた論文は J. Math. Soc. Japan に受理され掲載待ちである。

パンルヴェ第 VI 方程式の解空間の中で、非初等的なループに沿う非線形モノドロミー写像で不変な既約コンパクト部分集合は、孤立周期解のなす有限個の点集合か、超幾何関数解のなすリッカチ曲線のいずれかに限る。孤立周期解の個数は周期の大きさと共に指数的に増大する。その増大度は非線形モノドロミー写像のエントロピーを用いて表示される(連携研究者と共同)。RIMS 講究録別冊 B37 (2013), 49-67; ibid 69-79 等にその結果の一部を掲載（事業期間初頭に出版）。

また連携研究者は、有理曲面上の自己同型のなす多様な力学系を構成することに成功し、そのエントロピーの値域を決めることができた。この論文は掲載が決定している。

（２）超幾何系について

p,q,r,a,b を実数、x を $0 < x < 1$ なる実数とする。データ $\lambda=(p,q,r;a,b;x)$ に対して、w を自由パラメータとするガウスの超幾何級数 $f(w;\lambda)={}_2F_1(pw+a,\ qw+b;\ rw;\ x)$を考える。これに対して次の問題を考える。

【問題Ｉ】 $f(w;\lambda)$が w についてガンマ乗積表示を持つようなλを求めよ。

データλが問題Ｉの解となるための必要条件を求めることが我々の主要課題となる。

しかし、この問題を直接アタックすることは難しい。そこで関連する次の問題を考える。

【問題 II】比 $f(w+1;\lambda)/f(w;\lambda)$が w について有理関数となるようなλを求めよ。

ガンマ関数の漸化式より、λが問題 I の解ならば問題 II の解であることは容易に分る。そこで、問題Ｉを問題 II と関連させて考えていくことが我々の戦略である。特に、問題 II の解が、いつ問題Ｉの解に持ち上がるかを考えることは自然な問い掛けである。この疑問に答える為には、複素変数 w が無限大に行くときの、関数 $f(w;\lambda)$の漸近挙動を調べる必要がある。

データλの主要部 (p,q,r) が $0 < p < r$ または $0 < q < r$ となるようなλの領域を十字領域という。先ずλが十字領域に属するとき、鞍点法を適用することにより、$f(w;\lambda)$ の漸近挙動を得ることができた。この結果を

利用することにより、十字領域においては、λが問題 II の解ならば問題 I の解に持ち上がることを示した。

さて、問題 I または問題 II の解λが初等的とは、対応する w の有理型関数 f(w;λ)が全複素平面上で高々有限個の極しか持たないことをいう。そうでないとき、λは非初等的という。初等解は、一般に非初等解より簡単であるが、しばしば例外的な取扱いを必要とする。そこで、十字架領域で、問題 II の初等解をすべて分類し、具体的に書き下した。

次に 0 < p < r かつ 0 < q < r なるλの領域を中央領域と呼ぶ。この領域でより深い結果を導くことを考える。中央領域における任意の非初等解λ=(p,q,r;a,b;x) に対して、r は整数でなければならず、更に(p,q) は同時に整数であるか、または同時に半整数でなければならないことを示した。前者を A 型、後者をＢ型という。λがＢ型の解のとき、その倍２λ＝(2p,2q,2r;a,b;x) はＡ型解になる。従って、中央領域においては、A 型非初等解のみを考えれば十分であることが判った。

ところで、主要部 (p,q,r) が整数であるようなデータλ＝(p,q,r;a,b;x) に対して、問題Ｉの解を構成する方法として、隣接関係式の方法と呼ばれるものが知られている。そこで、中央領域における任意の非初等解λは隣接関係式の方法から得られることを示した。更にその応用として、x が代数的数でなければならないこと、より詳しく x を根とする代数方程式が (p,q,r) を用いて具体的に表せることを示した(arXiv: 1408.5658)。

更に進んで、中央領域におけるＡ型非初等解に対する結果をより深めた。そのために、ガウスの超幾何関数の隣接関係式がみたす24個の対称性に注目した(クンマーの24個の解に由来する)。この対称性は、問題 II の解に対する対称性を導く。それらのうち、特に相対性、相互性と名付けた二つの対称性が重要な役割を果たす。実際、これら二つの対称性が働くという事実そのものが、実は問題 II の解の存在を厳しく規制している。この認識が、第２作目の主要結果の概要となる。

より具体的には、中央領域における任意のＡ型非初等解λ＝ (p,q,r;a,b;x) に対して、整数 p,q,r の間にはある整除関係が成り立たなければならない、a,b は有理数でなければならない、(p,q,r)が与えられたとき λが解となるような (a,b;x) の候補は有限個に限られ、その候補は (p,q,r)を用いて具体的に書きあげることができる等の結果を得た (arXiv: 1504.03140)。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 岩崎克則（述）蛭子彰仁（記）、超幾何恒等式をめぐって、査読無、超幾何学校2015 講義録、高山信毅編、Rokko Lectures in Mathematics、2016、印刷中.

② Katsunori Iwasaki and Shu Okada, An orbifold Hamiltonian strucute for the first Painleve equation、査読有、J. Math. Soc. Japan、印刷中. http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/inpress.html

③ Takato Uehara, Rational surface automorphisms with positive entropy, 査読有、Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 66 (2016), no.1, 377-432.

〔学会発表〕（計１２件）

① 岩崎克則、蛭子彰仁、超幾何関数の隣接関係式・鞍点法・連分数，アクセサリーパラメータ研究会、熊本大学理学部（熊本県・熊本市)、2016 年 3 月 23 日.

② 岩崎克則、超幾何恒等式と超幾何連分数について、数論幾何・超幾何研究交流会，北海道大学理学研究院(北海道・札幌市)、2016 年 3 月 10 日.

③ 岩崎克則、Hypergeometric series with gamma product formula, International Conference on Partial Differential Equations: General Theory and Variational Problems, Costabella Tropical Beach Hotel, Cebu（フィリピン)、 2016 年 1 月 15 日.

④ 岩崎克則、超幾何恒等式をめぐって II、超幾何学校 2015、神戸大学理学研究科（兵庫県・神戸市)、2015 年 9 月 3 日.

⑤ 岩崎克則、超幾何恒等式をめぐって I、超幾何学校 2015、神戸大学理学研究科（兵庫県・神戸市)、2015 年 9 月 2 日.

⑥ 岩崎克則、超幾何和の算術性について、琉球超幾何セミナー、琉球大学理学部(沖縄県・中頭郡)、2015 年 2 月 12 日.

⑦ 岩崎克則、Arithmetic conditions for HG sums = Gamma products, 超幾何方程式研究会 2015、神戸大学瀧川記念学術交流会館(兵庫県・神戸市)、2015 年 1 月 5 日.

⑧ 岩崎克則、On some hypergeometric summations、RIMS 研究集会「複素領域における微分方程式・その近年の発展」京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)、2014 年 11 月 20 日.

⑨ 岩崎克則、超幾何和の特殊値をめぐって、微分方程式の展望､、木村弘信先生還暦記念研究集会、熊本大学理学部（熊本県・

熊本市)、2014 年 10 月 19 日.

⑩ 岩崎克則、岡田 脩、パンルヴェ第Ⅰ方程式の軌道体ハミルトン構造、第5回ハミルトン系とその周辺、金沢大学サテライト・プラザ(石川県・金沢市)、2014 年 5 月 30 日.

⑪ 岡田 脩,岩崎克則、パンルヴェ第Ⅰ方程式の軌道体ハミルトン構造について,超幾何方程式研究会 2014,神戸大学瀧川記念学術交流会館(兵庫県・神戸市),2014 年 1 月 5 日.

⑫ 岡田脩、岩崎克則、On an orbifold Hamiltonian structure for the first Painleve equation, International relation of young researchers in algebra and related fields, The 16th Seoul National University-Hokkaido University Joint Symposium, ソウル国立大学, ソウル(韓国)、 2013 年 12 月 13 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

岩崎　克則（IWASAKI,　Katsunori）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00176538

(2)連携研究者

上原　崇人（UEHARA,　Takato）
佐賀大学・理工学部・准教授
研究者番号：40613261