様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１２２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１０５

研究課題名（和文）測度論的拡大性を持つ微分可能力学系の特徴付けに関する研究

研究課題名（英文）On the characterization of measure-expansive differentiable dynamical systems

研究代表者
酒井　一博（SAKAI, Kazuhiro）

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：３０２０５７０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，確率測度に対し測度拡大的な微分同相写像，不変確率測度に対し測度拡大的な微分同相写像，そしてエルゴード的な不変確率測度に対し測度拡大的な微分同相写像を対象とし，微分幾何学的力学系理論の立場から特徴付ける。
次の成果が得られた：すべての確率測度に対し測度拡大的な微分同相写像の集合のC1-位相に関する内点は，擬-アノソフ系と一致，すべての不変確率測度に対し測度拡大的な微分同相写像の集合のC1-位相に関する内点は，Ω-安定な系と一致。さらに，C1-位相に関する摂動に対し位相推移性と非双曲性が維持され，すべてのエルゴード的な不変確率測度に対し測度拡大的な微分同相写像から成る開集合が存在。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we consider the sets of diffeomorphisms which are measure-expansive for any probability measure, invariant probability measure and ergodic measure, and study the sets from the viewpoint of geometric theory of dynamical systems.
It is proved that the C1-interior of the set of measure-expansive diffeomorphisms for any probability measure is quasi-Anosov systems and C1-interior of the set of measure-expansive diffeomorphisms for any invariant probability measures is Ω-stable systems. Furthermore, it is also proved that there exists a non-empty C1-open set of robustly non-hyperbolic and transitive diffeomorphisms such that each element of the set is measure expansive for any ergodic measure.

研究分野：擬軌道尾行性や拡大性を持つ力学系の特徴付け

キーワード：力学系理論　拡大性　確率測度　双曲性　占有的分解

１．研究開始当初の背景

コンパクト距離空間上の拡大的位相同相写像(expansive homeomorphism)の概念は，1950年代に導入されて以来，力学系の位相的エントロピー，空間の位相次元，系の安定性の研究において中心的な役割を担い，位相力学系理論の発展に大きく寄与してきた（[1]）。

最近，拡大性の概念の一般化として測度論的拡大性(measure-expansivity)の概念が導入され，測度論的な視点から拡大的位相同相写像の研究が開始された。例えば[2]では，「単位円周上には拡大的位相同相写像が存在しない」という有名な定理の測度論的視点からの明快な別証明を与えており，その概念の有効性が示されている。本研究では，測度論的拡大性の概念をいち早く微分幾何学的力学系理論に導入し，研究代表者が推進してきた，疑軌道尾行性（位相的概念）を満たす微分同相写像の C^1-位相における内点の特徴付けに関する研究成果・技法を活用し，その特徴付けを行うもので，本研究の推進基盤は充実しており，その成果が期待できる。

２．研究の目的

本研究では，測度論的拡大性の概念を微分 C^∞ 閉多様体 M 上の微分可能力学系に導入し，測度論的視点から拡大的力学系を微分幾何学的力学系理論の立場から特徴付ける。

コンパクト距離空間(X,d)上の位相同相写像 f が拡大的(expansive)であるとは，ある定数 $c>0$ が存在し，任意の $x,y\in X(x\neq y)$ に対し $n\in\mathbb{Z}$ が存在して，$d(f^n(x),f^n(y))\geq c$ が成り立つことをいう。この性質は多くの力学系に現われ，近年，力学系のカオスの研究において重要な概念の一つになっている。拡大性の概念は，当初，主に「どのような空間上に拡大的写像が存在するか」が研究された。

1960 年代後半から Smale 等による微分幾何学的力学系理論が双曲性の概念を基にして急速に発展した。双曲性は力学系の不変閉集合に対し定義される概念で，双曲的ならば拡大的であることが知られている。例えば Anosov 微分同相写像，Axiom A 系微分同相写像等は拡大的である。

また，エルゴード理論においては，力学系の軌道振舞をエントロピーで捉えるために測度論的エントロピーの最大エントロピーを位相的エントロピーであるとみなし，それに適合する不変測度の存在から力学系を研究している。この研究においても拡大性は本質的な役割を担ってきた。

拡大性の概念は，構造安定性予想の解決過程においても重要な役割を果たした。Mañé [3]によって名付けられた M 上の quasi-Anosov 微分同相写像は拡大的である。M 上の微分同相写像全体の空間を Diff(M) で表し(C^1-位相を導入)，拡大的な微分同相写像全体を $\mathscr{E}$ で表す。Mañé は，$\mathscr{E}$ の C^1-位相に関する内点を quasi-Anosov として特徴付けた。その証明で用いられた，（双曲型分解の一般化である）占有的分解(dominated splitting)の概念やそれに付随する局所部分多様体の存在は，構造安定性予想の証明において基本的である。

$f\in\mathrm{Diff}(M)$ とし，μ を M 上の確率測度とする(f-不変とは限らない)。f が μ-拡大的（測度論的拡大性の定義）であるとは，ある $\delta>0$ が存在し，すべての $x\in M$ に対し $\mu(\Gamma_\delta(x))=0$ が成立することをいう。ただし，$\Gamma_\delta(x)=\{y\in M:d(f^n(x),f^n(y))\leq\delta\ (\forall n\in\mathbb{Z})\}$，d は M 上の距離。

M 上の f-不変エルゴード的確率測度全体を $\mathscr{M}_f^e(M)$ で表す。本研究では $\mathscr{E}\mathscr{E}=\{f\in\mathrm{Diff}\}(M):\mu$-拡大的$(\forall\mu\in\mathscr{M}_f^e(M))\}$ をその主な考察対象とし，$\mathscr{E}\mathscr{E}$ に属する微分同相写像を微分幾何学的力学系理論の立場から分類すると共にその C^1-位相に関する内点を特徴付ける。具体的には $f\in\mathscr{E}\mathscr{E}$ に対し，非遊走集合 $\Omega(f)$ に占有的分解が存在すること，或いは部分的双曲型分解（partially hyperbolic splitting）が存在するための条件の探索である。

測度論的拡大的を満たす力学系 f の軌道振舞を反映する確率測度 μ は，「f-不変とは限らない単なる測度」，「f-不変測度」，「(f-不変）エルゴード的測度」とその範囲を変えることで，考察対象となる力学系の範囲が拡大される。本研究では，単に対象とする確率測度に連動する力学系の特徴付けについての研究を推進するのみではなく，微分幾何学的力学系理論と測度論の融合を図ることで，特徴付けの過程において発見される新たな概念・新たな研究手法の創出を目指す。

代表者は擬軌道尾行性(pseudo-orbit shadowing property)を持つ微分同相写像の C^1-位相に関する内点の特徴付けを通し，力学系の分類を行ってきた（[4]，[5]）。本研究では，研究姿勢においてその精神と同じ延長上にあり，研究の推進にあたってはそこで培われたノウハウを十分に活かすことが可能である。

Smale により開始された力学系の微分幾何学的力学系理論の研究は，その対象が双曲型力学系の補集合である非一様双曲型力学系に移行している。非一様双曲型力学系の研究は微分幾何学や位相幾何学的視点はもちろん，あらゆる数学の視点・手法から研究が進められているが，その分類作業においては際立った進展がみられていない。本研究は，測度論との融合という新たな視点から非双曲型力学系の分類を行うもので，前述のように単に分類（特徴付け）のための新たな視点を導入するということではなく，本研究の推進過程で発見・開発される力学系の解析手法により，力学系理論全体における研究の進展に貢献することができる。また，拡大性の概念はカオスの定義の構成要素である初期値鋭敏性とも深い関係がある。本研究では，その概念を測度論的な視点，すなわち「観測可能の視点」から研究を展開しようとするもので，

そこで得られた研究成果はカオス研究の応用面においても大きな寄与が期待できる。

３．研究の方法

C^∞閉多様体 M 上の微分同相写像の全体にC^1-位相を導入した空間を Diff(M)，拡大的な微分同相写像全体を $\mathscr{E}$で表す。M 上の確率測度全体を $\mathscr{M}$(M), f-不変確率測度$\mu\in\mathscr{M}_f$(M)の全体を $\mathscr{M}_f$(M)，エルゴード的な$\mu\in\mathscr{M}_f$(M)の全体を $\mathscr{M}_f^e$(M)で表す。本研究では，以下の集合を考察の対象とする。

$\mathscr{ME}$ ={f∈Diff}(M)：μ-拡大的(∀$\mu\in\mathscr{M}$(M))}

$\mathscr{IE}$ ={f∈Diff(M)：μ-拡大的(∀$\mu\in\mathscr{M}_f$(M))}

$\mathscr{EE}$={f∈Diff}(M)：μ-拡大的(∀$\mu\in\mathscr{M}_f^e$(M))}

明らかに $\mathscr{E}\subset\mathscr{ME}\subset\mathscr{IE}\subset\mathscr{EE}$が成り立つ。

拡大的な微分同相写像の C^1-位相に関する内点は Mañé [3]により双曲性（＋擬横断性条件）を満たす力学系として特徴付けされている。また，すべての周期点が双曲的である微分同相写像の C^1-位相に関する内点は Hayashi[7]により双曲的であることが知られている。これらの結果に，代表者自身による擬軌道尾行性を満たす微分同相写像の特徴付けにおける研究成果・手法（[4]，[5]）を応用することで，上記集合２つの内点集合（int A で集合 A の内点を表す）について「int$\mathscr{ME}$ = int$\mathscr{E}$」，「int$\mathscr{IE}$ = Ω-安定性」が成り立ち，測度論的拡大性と双曲性との関係は明確となった（[6]）。従って本研究の課題は，非一様双曲性の視点から $\mathscr{EE}$ を分類し特徴付けすることである。特に f∈int$\mathscr{EE}$ に対し，一様双曲型分解の概念の一般化である占有的分解及び部分的双曲型分解の存在について研究を推進する。

具体的には f∈int$\mathscr{EE}$ に対し

Ⅰ. Ω(f)=Cl{$\cup_{\mu\in\mathscr{M}_f^e(M)}$ supp(μ)}となること，

Ⅱ. Ω(f)上に占有的分解が存在することを示し，更に

Ⅲ. Ω(f)上に部分的双曲型分解が存在するための必要十分条件の探索

を行う。ここで，Cl{A} は集合 A の閉包，supp(μ)は，測度μの台。

f∈int$\mathscr{EE}$ とする。課題Ⅰの証明には Pugh の閉補題を用いる。課題Ⅱの解決に向けての基本方針は，(粗い議論ではあるが)以下の通り：ある測度$\mu\in\mathscr{M}_f^e$(M)に対し supp(μ)上に占有的分解が存在しないと仮定する。Mañé のエルゴード的閉補題 [8] により，f の C^1-位相に関する近傍に，占有的分解を持たない周期軌道を有する g が構成できる。占有的分解が存在しないことから，[9]により，g の C^1-位相に関する近傍に吸引的周期点又は反発的周期点を所有する $\tilde{g}$が存在することがわかる。その周期点の近傍の中に，エルゴード的確率測度を持ち拡大的ではない（部分的）力学系を構成することにより矛盾を導く。このような部分力学系は[10]で構成されており，その手法は本研究に応用可能と考えられる。

課題Ⅲの解決に向けての方針は明確ではない。まず，[11]により構成された３次元トーラス上の部分的双曲型分解をもつ微分同相写像のクラス $\mathscr{O}$（開集合）について測度論的拡大性を検証する。g∈$\mathscr{O}$ は拡大的ではないが，１次元の中心方向 E^c 以外 E^s，E^u は双曲的で，さらに E^c に対応する不変多様体上にはある種の拡大性(plaque expansivity)の存在が知られている。これにより g∈$\mathscr{EE}$の証明が可能と考えられる。

この開集合の構造を詳細に検討・解析することで $\mathscr{EE}$の分類，そして課題Ⅲの解決に向けた研究への糸口の発見を目指す。

さらに，[12]では C^1-位相に関し，非一様双曲型力学系についての多くの一般的（generic）性質が証明されている。課題Ⅲの解決に有効であると考えられる結果のひとつは，例えば以下のものである：「C^1-位相に関し一般的な微分同相写像に対しては，弱位相に関し一般的なエルゴード的確率測度μの台上に占有的分解 E⊕F が存在し,かつ(多少粗い説明であるが)E の Lyapunov 指数は負，F の Lyapunov 指数は正」。本研究の設定（f∈int$\mathscr{EE}$）であれば上記のタイプ結果は即座に応用可能であり，課題Ⅲの解決に向けた研究における進展が期待できる。

【参考文献】

[1] 平出耕一，拡大的写像の力学系，数学 42 (1990)，32-47.
[2] C. A. Morales and V. F. Sirvent, Expansive measures, IMPA Mathematical Publications 29, Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.
[3] R. Mañé, Expansive diffeomorphisms, Dynamical systems-Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974), 162-174, Lecture Notes in Math. 468, Springer, Berlin, 1975.
[4] K. Sakai, Pseudo-orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms on closed manifolds, Osaka J. Math. 31 (1994), 373-386.
[5] K. Sakai, C^1-stably shadowable chain components, Ergodic Theory & Dynam. Sys. 28 (2008), 987-1029.
[6] K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, Measure-expansive diffeomorphisms, Journal of Mathematical Analysis and its Applications 414 (2014), 546-552.
[7] S. Hayashi, Diffeomorphisms in $\mathscr{F}^1$(M) satisfy Axiom A, Ergodic Theory & Dynam. Sys. 12 (1992), 233-253.
[8] R. Mañé, An ergodic closing lemma, Ann. of Math. 116 (1982), 503-540.
[9] C. Bonnati, N. Gourmelon and T. Vivier, Perturbations of the derivative along periodic

orbit, Ergodic Theory & Dynamical Systems 26 (2006), 1307-1337.
[10] C. Bonatti and L. J. Díaz, On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms, Publ. Math. Inst. Hautes. Études Sci. 96 (2002), 171-197.
[11] R. Mañé, Contributions to stability conjecture, Topology 17 (1978), 383-396.
[12] F. Abdenur, C. Bonatti and S. Crovisier, Nonuniform hyperbolicity for C^1-generic diffeomorphisms, Israel J. Math. 183 (2011), 1-60.

４．研究成果

研究目的を達成するため，微分可能閉多様体 M 上の微分同相写像全体を Diff(M)(C^1-位相を導入)，拡大的な微分同相写像全体を $\mathscr{E}$ で表す。f∈Diff(M)とし，M 上の確率測度全体を $\mathscr{M}$(M)，f-不変確率測度μ∈$\mathscr{M}$(M)の全体を $\mathscr{M}_f$(M)，エルゴード的なμ∈$\mathscr{M}_f$(M)の全体を $\mathscr{M}_f^e$(M)で表す。本研究では，前述のように３つの集合 $\mathscr{PE}$ ={f∈Diff(M)：μ-拡大的(∀μ∈$\mathscr{M}$(M))}，$\mathscr{IE}$ ={f∈Diff(M)：μ-拡大的(∀μ∈$\mathscr{M}_f$(M))}，$\mathscr{EE}$ ={f∈Diff(M)：μ-拡大的(∀μ∈$\mathscr{M}_f^e$(M))}を考察する。

$\mathscr{E}$，$\mathscr{IE}$ の C^1-位相に関する内点について「int$\mathscr{PE}$ = int$\mathscr{E}$」「int$\mathscr{IE}$ = Ω-安定性」が成り立ち，測度論的拡大性と双曲性との関係は明確となっている（論文は 2014 年，専門雑誌掲載済)。

本研究の具体的な目標は，「３．研究の方法」の課題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの解決である。その礎となる，[11]により構成された３次元トーラス上の部分的双曲型分解をもつ微分同相写像のクラス $\mathscr{O}$（開集合）については $\mathscr{O} \subset \mathscr{EE}$ であることが証明され，$\mathscr{EE}$ の具体例の構造(位相推移的であり，非双曲的であるが部分的双曲型分解を持つ）を解明することができた（論文は 2015 年，専門雑誌に掲載済)。

本研究では，課題Ⅰの解決に向け，Pugh の閉補題の検討を行った。

課題Ⅱの解決に向けては，次のような方針でその解決を目指した：ある測度μ∈$\mathscr{M}_f^e$(M)に対し supp(μ)上に占有的分解が存在しないと仮定すると，エルゴード的閉補題により f の C^1-位相に関する近傍に，占有的分解を持たない周期軌道を有する g を構成することができる。周期軌道には占有的分解が存在しないことから，g の C^1-位相に関する近傍に固有値の絶対値が 1 に近い吸引的周期点または反発的周期点を所有する g~が存在することを示し，最終的にその周期軌道の近傍にエルゴード的確率測度を持ち拡大的でない力学系を構成することで矛盾を導く。しかし，最終年度においてものエルゴード的測度の構成には至っていない（従って課題Ⅲについても具体的な進捗はない)。しかし，本研究の推進過程において，同相ではない微分可能写像に関し，測度拡大性による（部分的ではあるが）特徴付けに成功した。微分可能写像には一般に特異点が存在するため，その証明方法は微分同相写像とは同様ではない（論文は 2016 年，専門雑誌掲載済)。

以上により総合的に勘案し，本研究の達成状況は概ね 70%である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計３件)

1. K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, Measure expansive diffeomorphisms, Journal of Mathematical Analysis and its Applications 414, pp.546-552, 2014.

2. K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, Ergodic measure-expansive diffeomorphisms, Dynamical Systems: An International Journal 29, pp.569-577, 2014.

3. L. Lee, M. Lee, K. Sakai and K. Moriyasu, Positively measure-expansive differentiable maps, Journal of Mathematical Analysis and Applications 435, pp.492-507, 2016.

〔学会発表〕(計１件)

① 酒井 一博，平成 27 年５月１日 Chungnam National University 数学教室にて講演（忠南国立大学，大田（Daejeon)，韓国）
タイトル：Positively measure-expansive maps

〔図書〕(計０件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件)
○取得状況（計０件)

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織（１名）

(1)研究代表者
酒井 一博（SAKAI Kazuhiro)
宇都宮大学・教育学部・教授
研究者番号：３０２０５７０２