

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 21 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400114

研究課題名(和文) 微分方程式に対する漸近解析の新しい展開

研究課題名(英文) New developments of asymptotics for differential equations

研究代表者

小池 達也 (Koike, Tatsuya)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80324599

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：主として完全 WKB 解析の Voros 係数についての研究を行なった。完全 WKB 解析において Voros 係数は WKB 解の Borel 和の大域的な研究の際に重要な役割を担うが、特に、(1) 特異摂動型高階線形常微分方程式の Voros 係数の middle convolution を用いた計算について、(2) 無限階微分作用素を用いた Boosted 作用素に対する完全 WKB 解析の研究、(3) ある種ポテンシャルを持つ特異摂動型二階線形常微分方程式の WKB 解の Borel 変換の無限遠での増大度の研究と多重総和法との関係、といった研究について大きく進展させることができた。

研究成果の概要(英文)：In this research we mainly studied Voros coefficients in exact WKB analysis, i.e., WKB method based on the Borel resummation method. Voros coefficients are one of the most important objects to study global behaviors of WKB solutions. We succeeded in clarifying the following topics: (1) the computation of Voros coefficients of singular perturbed higher order linear ordinary differential equations via the middle convolutions, (2) WKB theoretic studies of boosted operators using differential operators of infinite order, (3) the study of the exponential order of the Borel transform of WKB solutions of singular perturbed second order linear ordinary differential equations, and its relation to the multisummability.

研究分野：完全WKB解析

キーワード：完全WKB解析 漸近展開 ボレル総和法 特異摂動 Voros係数

## 1. 研究開始当初の背景

複素領域における微分方程式論の漸近解析はボレル総和法の導入によって一つの大きな発展をみせた。ボレル総和法による漸近解析には指数的に小さい項が無理なく扱えるなどの長所があり、標語的に "Asymptotics beyond all order" と呼ばれる新しい漸近展開の理論的基礎の一つとなっている。

WKB 法においても Voros の研究以降、ボレル総和法を適用することで研究が大きく進展し、現在では完全 WKB 解析と呼ばれる分野として、その研究対象も元々の一次元シュレーディンガー方程式から特異摂動型高階線形常微分方程式、あるいは非線形常微分方程式などのひろがりを見せてきた。

特に近年の進展として、完全 WKB 解析における Voros 係数の研究がある。Weber 方程式の Voros 係数の明示的な表式 (Sato's conjecture) と microdifferential operator を用いた変換論により、二つの単純変わり点が「近く」にある状況における WKB 解のボレル変換像の特異点の構造についての研究が青木・河合・竹井によって進められ、その研究は様々な方程式・状況での Voros 係数の研究へとつながった。この Voros 係数の研究は、その応用として方程式に含まれる (プランク定数ではない) パラメータに関する Stokes 現象の解明といった微分方程式論としても興味深い研究を応用に持ち、重要なものとなっていた。

## 2. 研究の目的

従来の Voros 係数の研究は主として二階線形・非線形常微分方程式のものに限られていたため、より広いクラスの方程式 (例えば高階線形常微分方程式) を対象とすることで漸近解析の研究の進展が考えられる。特に Voros 係数の研究から WKB 解の Borel 変換像の研究は「動かない」特異点の研究へとつながり、その解明は応用面ではパラメータに関する Stokes 現象の研究にもつながり、また理論面でも WKB 解の resurgence 性の足掛かりになると期待できる。さらには Borel 変換を用いない漸近解析の手法を用いて WKB 解の resurgence 性の解明への試みもなされてきており、そうしたものと接点を Voros 係数が与えてくれる可能もある。

このように理論面からも応用面からも重要な Voros 係数の研究をより一層進めることは微分方程式論における漸近解析の研究においてとても重要と考えられる。本研究ではこの新しい研究の方向である Voros 係数を研究し、特に高階線形常微分方程式の Voros

係数の決定方法や二階方程式であっても未解決で残された完全 WKB 解析の問題 (単純極型作用素など)、さらには Borel 総和法を用いない漸近展開との関連についての研究を進めることを目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究の一つの柱はボレル総和法である。ボレル総和法による漸近解析では指数的に小さい項を自然な形で扱うことができ、特に Stokes 現象の記述に優れる。ボレル変換により漸近解析の研究はボレル平面での解のボレル変換像の解析的な性質の研究に帰着される。特に WKB 解の Borel 変換像の特異性を調べるにあたっては、従来の研究では microdifferential operator を用いた標準形方程式からの変換論が有用であった。この研究でもそうした超局所解析の手法が用いられる。

## 4. 研究成果

### (1) 高階線形常微分方程式の Voros 係数と middle convolution.

近年、複素領域の線形常微分方程式論では middle convolution を用いた研究が著しく進展し、様々な成果が得られてきている。そこで、こうした middle convolution の理論が WKB 解の Borel 変換像の解析的な性質にどのように関わってくるかに興味を持たれる。

Middle convolution により方程式にはパラメータが導入される。このパラメータが WKB 解の Borel 変換像の解析的な性質とどのように関係してくるかを調べるために、Middle convolution により得られる方程式の Voros 係数がそのパラメータにどのように依存するかを調べ、これを generic な仮定のもとで明らかにした。この結果は middle convolution により導入されるパラメータに関する隣接作用素を用いて Voros 係数のそのパラメータに関する差分方程式を求めることで得られる。

さらに、適当な仮定のもとで、middle convolution によって変わり点がどのように変化するかを調べ、middle convolution を作用する前後で保たれる変わり点に関する Voros 係数については、middle convolution によって変わらないことも示した。これにより幾つかの高階線形常微分方程式については Voros 係数を決定するこ

とができた。

また、パラメータが零あるいは無限大の極限において Voros 係数がどのように振舞うかの考察を合流型超幾何関数をはじめとする幾つかの具体的な方程式に対して試み、それによって Voros 係数を決定することにも成功した。

(以上、岩城耕平氏(名古屋大学)との共同研究)

## (2) 無限階微分作用素の完全 WKB 解析への応用.

単純極型変わり点を含む高階常微分方程式の単純極における完全 WKB 解析の研究において、その標準形(微分作用素の割り算定理を示すことで得られる)がクーロンポテンシャルを持つ二階シュレーディンガー型方程式となることが知られているが、一番 generic な状況では中心力項のプランク定数に関する次数が 1 次となり、接続問題が未解決のままで残されていた。

通常、中心力項はプランク定数に関して 2 次であり、その場合は WKB 解の接続公式は得られている。形式的には中心力項が大きい場合(つまりプランク定数に関して  $-1$  次)を考えることになり、スケーリングで対応付けできるが、その Borel 平面における解析的な意味付けをパラメータに関する無限階微分作用素を用いることで与えることに成功した。これによって単純極型変わり点における接続公式を与えることができた。

この問題のように、方程式のパラメータをプランク定数の次数を変えて「大きく」、ただし Stokes 幾何は変更ない程度には「小さい」スケーリングによって得られる微分方程式または微分作用素を boosted equation あるいは boosted operator と呼んでいる。このような方程式の WKB 解を Borel 平面で考察するにあたって無限階微分作用素の援用が有効であることを見出し、前述の単純極型変わり点での接続公式のほかに、Whittaker 方程式を boost したものの Voros 係数の特異点の構造の決定(特異点の位置、及び、特異点での alien derivative の計算)にも成功した。

(以上、河合 隆裕氏(京都大学)、神本 晋吾氏(広島大学)と共同研究)

## (3) 二階線形常微分方程式に対する WKB 解と多重総和法

ポテンシャルに大きいパラメータに関して低次の項が含まれている場合に、その WKB 解が Borel 総和可能にならず多重総和可能になることがある。例えばポテンシャルが多項式の場合だと、これはポテンシャルのゼロ点がプランク定数を 0 にする極限で無限遠点と合流する状況の場合に起きると考えられている。

そこでこのような状況で WKB 解が多重総和可能となることを一般的な仮定のもとで示すことを目的で、ポテンシャルが多項式の場合に WKB 解の Borel 変換の無限遠点での増大度を考察し、それが Newton 図形から予想される増大度で評価できることを示した。

ポテンシャルが有理関数の場合も同様のことが示せるが、適当な仮定のもとで Borel 平面内の方向を固定したときの多重総和法の指数を Stokes 幾何を用いて予想することにも成功した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Shingo Kamimoto, Tatsuya Koike, On the Borel summability of 0-parameter solutions of nonlinear ordinary differential equations, Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B40, 2013, 191-212, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B40/pdf/B40-15.pdf>

Tatsuya Koike, Yoshiitsugu Takei, Exact WKB analysis of second-order non-homogeneous linear ordinary differential equations, Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B40, 2013, 293-312, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B40/pdf/B40-19.pdf>

Kohei Iwaki, Tatsuya Koike, On the computation of Voros coefficients via middle convolutions, Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B52, 2014, 55-70.  
Shingo Kamimoto, Takahiro Kawai, Tatsuya Koike, Resurgent functions and linear differential operators of infinite order---Their happy marriage in exact WKB analysis, Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B52, 2014, 127-146.  
Shingo Kamimoto, Takahiro Kawai, Tatsuya Koike, On the singularity structure of WKB solution of the

boosted Whittaker equation: its relevance to resurgent functions with essential singularities, Lett. in Math. Phys., 査読有, 106, 2016, 1791-1815, DOI:10.1007/s11005-016-0887-x

〔学会発表〕(計10件)

Tatsuya Koike, On irregular modified A-hypergeometric series and Borel summation method, Formal and Analytic Solutions of Differential, Difference and Disc rete Equation, 2013年08月29日, Bedlewo (Poland)

Tatsuya Koike, Applications of linear differential operators of infinite order in resurgent function theory, Global Study of Differential Equations in the Complex Domain, 2013年9月1日, Warsaw (Poland)

Tatsuya Koike, On the computation of Voros coefficients via middle convolutions, Global Study of Differential Equations in the Complex Domain, 2013年9月2日, Warsaw (Poland)

Tatsuya Koike, On the computation of Voros coefficients via middle convolutions, 微分方程式の指数解析とその周辺, 2013年10月15日, 京都大学数理解析研究所(京都府)

Tatsuya Koike, On irregular modified A-hypergeometric systems and the Borel summation method, Recent progress in the theory of Painlevé equations: algebraic, asymptotic and topological aspects, 2013年11月7日, Strasbourg (France)

Tatsuya Koike, On Voros coefficients and middle convolutions for linear ordinary differential equations with a large parameter, Several aspects of microlocal analysis, 2014年10月22日, 京都大学数理解析研究所(京都府)

Tatsuya Koike, Introduction to Borel summation method and some applications to differential equations, Seminar of Algebra, 2015年2月12日, Sevilla (Spain)

Tatsuya Koike, On a connection formula of WKB solutions of the ``boosted'' simple pole type operators of second order in exact WKB analysis, Seminar of Algebra, 2015年2月17日, Sevilla (Spain)

Tatsuya Koike, On a connection formula of WKB solutions of the ``boosted'' simple pole type operators of second order in exact WKB analysis, Seminar of Algebra, 2015年2月17日, Sevilla (Spain)

小池 達也, 完全 WKB 解析と multisummability について, 超幾何方程式研究会 2016, 2016年1月7日, 神戸大学(兵庫県)

〔図書〕(計0件)

〔その他〕  
特になし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小池 達也 (KOIKE, Tatsuya )  
神戸大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 80324599

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号:

(4) 研究協力者

( )