

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：15101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400115

研究課題名(和文)可解リー群における非可換フーリエ解析とその等質空間上の解析への応用

研究課題名(英文) Non-commutative Fourier analysis on solvable Lie groups and its applications in analysis on homogeneous spaces

研究代表者

井上 順子 (Inoue, Junko)

鳥取大学・大学教育支援機構・准教授

研究者番号：40243886

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：非可換フーリエ変換について、指数型可解リー群の二つの例に対して $C^*$ 群環のフーリエ変換像を軌道法に基づき記述した。 $L_p$ フーリエ変換( $1 < p < 2$ )のノルムについて、ユニモジュラーI型リー群 $N$ と $N$ に作用するコンパクト群との半直積群に対して、そのノルムを群 $N$ のノルムを用いて上から評価した。複素解析的誘導表現について、ベクトル群 $R_n$ に実数 $R$ が作用する指数型半直積群 $G$ を扱った。1次元複素部分リー環 $\mathfrak{h}$ で $\mathfrak{h}$ とその複素共役空間の和空間が $G$ のリー環の複素化全体をリー環として生成するものがあり、かつ $G$ がある技術的条件を満たす仮定の下で、 $\mathfrak{h}$ からの零でない複素解析的誘導表現とその既約表現の直積分への分解を得た。

研究成果の概要(英文)：Concerning non-commutative Fourier transforms, we studied two examples of exponential solvable Lie groups; for them we described the images of their  $C^*$ -algebras by the Fourier transform in terms of the orbit method. For the norm of the  $L_p$ -Fourier transform ( $1 < p < 2$ ), we treated a semi-direct product group of a unimodular type I Lie group  $N$  and a compact group acting on  $N$ , and we obtained an estimate of the norm of its  $L_p$ -Fourier transform by using that of  $N$ . For holomorphically induced representations, we studied a semi-direct product group  $G$  of a vector group  $R_n$  and  $R$  acting on  $R_n$ . Assuming that there is a complex one dimensional subalgebra  $\mathfrak{h}$  such that the space  $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^{\sim}$ , where  $\mathfrak{h}^{\sim}$  is the complex conjugate of  $\mathfrak{h}$ , generates the complexification of the Lie algebra of  $G$  and that  $G$  satisfies some technical conditions, we obtained a non-zero representation holomorphically induced from  $\mathfrak{h}$ , and its decomposition into a direct integral of irreducible representations.

研究分野：表現論

キーワード：フーリエ変換 複素解析的誘導表現 可解リー群 ユニタリ表現 軌道法 非可換調和解析

1. 研究開始当初の背景

(1)可解リー群上の調和解析においては、Kirillovによって創始された「軌道法」がその基礎を形成してきた。これは、群の既約ユニタリ表現と群の余随伴軌道とを対応づけることにより、表現の解析を進める方法であり、この考え方に沿って Auslander-Kostant 理論により I 型の可解リー群の既約ユニタリ表現の構成が完成された。また特に指数型可解リー群の場合、即ち指数写像がリー環からリー群への微分同型写像である場合は、Kirillov、Bernat、Vergne、Pukanszky、Ludwig、Leptin らにより確立された理論により、余随伴軌道の空間からユニタリ双対への Kirillov-Bernat 写像が同相写像であることが示された。ユニタリ双対の構成に関するこの基礎理論を踏まえ、群環の表現としてのフーリエ変換の解析や、群の表現の構成法の一つである複素解析的誘導表現の構成・分解の理論において、研究代表者は以下の問題に着目し携わってきた。

(2)一般にリー群上の可積分関数に対して定義される非可換フーリエ変換は、 $\mathbb{C}$  群環から群のユニタリ双対上の有界作用素場の成す  $\mathbb{C}$  環への単射準同型を定める。このことから、 $\mathbb{C}$  群環の非可換フーリエ変換像を決定・記述することは  $\mathbb{C}$  群環の解析で基本的な問題である。特に指数型可解リー群においては、「軌道法」により群のユニタリ双対を群の余随伴軌道の空間と同一視し、フーリエ変換の像を余随伴軌道の空間上の有界作用素場とみなすことができる。この視点に基づき Ludwig、Turowska、Lin らにより、Heisenberg 群、冪零 thread-like 群、 $ax+b$ -like 群など幾つかの群についてはフーリエ変換像の記述について具体的な結果が得られている。しかし一般にはユニタリ双対の位相が極めて複雑であり、まだあまり分かっていない。研究代表者は、フランス・ロレーヌ大学の Ludwig 氏および英国・クイーンズ大学ベルファストの Lin 氏と共同研究を始め、2012 年 10 月にフランス・CIRM での研究集会で、既知の例以外の指数型可解リー群の例の一つにおけるフーリエ変換像の解析について当時までに共同研究で得られた結果の中間報告(講演)を行った。

(3)ユニモジュラーな I 型のリー群において、群の  $L^p$  フーリエ変換 ( $1 < p < 2$ ) は、群上の  $p$  乗可積分関数の空間から群のユニタリ双対上の  $q$  Schatten 族作用素場の空間 ( $q$  は  $p$  の共役指数) への連続線型写像として定義される。このとき、指数  $p$  ( $1 < p < 2$ ) に対する  $L^p$  フーリエ変換のノルムを求めることは、群上の  $L^p$  フーリエ解析における基本問題の一つである。古典的な調和解析の結果、即ち  $n$  次元ベクトル群  $\mathbb{R}^n$  やコンパクト群等の場合にはノルムが決定されたが、非可換かつ非コ

ンパクトな群に対しては、特別な場合を除きまだ部分的な結果にとどまっている。一般にユニモジュラーな局所コンパクト群の半直積で表されるユニモジュラー局所コンパクト群に対して、Klein-Russo は共役指数  $q$  が偶数の場合に  $L^p$  フーリエ変換のノルムが半直積を構成する二つの群におけるそれぞれの  $L^p$  フーリエ変換のノルムの積以下であることを示し、特に Heisenberg 群に対しては、 $q$  が偶数の場合にノルムを決定した。一方、研究代表者はこれまでチュニジア・スファックス大学の Baklouti 氏と共同でこの問題を扱う研究を行い、対象とする群がベクトル群  $\mathbb{R}^n$  とこれに作用するコンパクト群  $K$  との半直積群の場合に  $1 < p < 2$  を満たす全ての指数  $p$  に対して  $L^p$  フーリエ変換のノルムが  $\mathbb{R}^n$  の  $L^p$  フーリエ変換のノルムに等しいという結果を得た。コンパクト群の  $L^p$  フーリエ変換のノルムは 1 であるから、この結果は  $\mathbb{R}^n$  と  $K$  の半直積群のノルムがそれを構成する二つの群のノルムの積に一致すると解釈できる。

(4)リー群の複素解析的誘導表現は、リー環の実線型形式をリー環の複素化に拡張した線型形式に付随して定まる反対称双線型形式とこれに等方的な複素部分リー環から「誘導」の手順により群の表現を構成する方法である。特に分極環 (polarization) からの誘導表現は、Auslander-Kostant による、I 型可解リー群の既約ユニタリ表現の構成において中心的な役割を果たした。一方、分極環とは限らない一般の複素部分リー環から同様の手順により誘導される表現についての解析は、まだあまり進められていない。しかし、個別の例として分極環ではなくても冪零リー群の対称空間に付随する場合には Magneron による研究結果 (1993 年、1999 年) があり、また、分極環の条件を弱くした weak polarization からの複素解析的誘導表現の構成と既約分解について、研究代表者は、正規  $\mathfrak{g}$  代数をリー環に持つ指数型可解リー群を対象としてある研究結果 (2001 年) を得た。これらのことから、分極環より広い枠組みで複素解析的誘導表現の構成・分解を統一的に理解し記述することは興味深い問題であると考えられる。

2. 研究の目的

これまでの研究を踏まえ、以下の事項を目標とする。

(1)指数型可解リー群において、群環の非可換フーリエ変換の像を調べ、軌道法を用いて具体的に記述する。

(2)冪零・可解リー群のコンパクト拡大等、様々なリー群を対象とし、 $L^p$  フーリエ変換のノルムの評価・計算等を行い、これを通して  $L^p$  フーリエ解析を進める。

(3)指数型可解リー群において、一般化された複素解析的誘導表現の構成・分解を調べる。

### 3. 研究の方法

(1)指数型可解リー群の  $C^*$ 群環のフーリエ変換の像の解析については、「研究開始当初の背景(2)」で始めた研究を本研究期間中に共同研究として仕上げ、論文発表した。

(2) $L^p$  フーリエ変換のノルムについては、Baklouti 氏(スファックス大学)と共同で研究を進めた。これまで Baklouti 氏との共同研究でベクトル群  $R^n$  とコンパクト群との半直積群に対して得られた結果を踏まえ、冪零・可解リー群のみならず一般のユニモジュラー  $I$  型リー群にコンパクト群が作用する形で得られる半直積群において、 $L^p$  フーリエ変換のノルムの上からの評価を試みた。共同研究遂行のため、研究代表者はチュニジア・スファックス大学を短期訪問し、また、Baklouti 氏を鳥取大学に短期招聘して研究議論・計算等を行った。半直積群の  $L^p$  フーリエ変換のノルムの上からの評価に関して本研究期間で得られた結果について、チュニジア・モナステールで開催された研究集会 4th Tunisian-Japanese Conference (学会発表) および「2015 年度表現論ワークショップ」(学会発表) で講演発表した。

(3)指数型可解リー群における複素解析的誘導表現については、分極環ではない一般の複素部分リー環から誘導され、零でない表現が構成される新しい例を探し詳しく調べること重点をおいて研究を進めた。ベクトル群  $R^n$  に実数の群  $R$  が作用して得られる半直積群を対象とする場合にそのような例があり、これを調べて得られた結果を論文にまとめ発表した。研究を進める過程で、国内外の研究集会等で講演発表や研究情報の収集を行い考察を深めた。海外での講演としては、チュニジア・ハマメットで開催された 3rd Tunisian-Japanese Conference(学会発表)、チュニジア・スファックス大学で行われたセミナー(学会発表)での発表がある。国内での講演としては、京都大学数理解析研究所の RIMS 研究集会(学会発表)、鳥取市での研究集会(学会発表)、鹿児島大学での研究会(学会発表)、日本数学会秋季総合分科会(学会発表 一般講演)、「表現論ワークショップ」(学会発表、 )での発表がある。

### 4. 研究成果

(1)指数型可解リー群の  $C^*$ 群環のフーリエ変換の像の解析: Lin 氏(クイーンズ大学ベルファスト)および Ludwig 氏(ロレーヌ大学)との共同研究により、 $Sp(2, R)$  の岩澤 AN 部分群として得られる 6 次元の指数型可解リー群「 $N_{6,28}$ 」および Heisenberg 群と実数  $R$  とのある半直積で表される群の例を対象に取り上げ、それぞれ群の余随伴軌道の位相を詳しく調べ、 $C^*$ 群環のフーリエ変換像を余随伴

軌道を用いて特徴づけ、決定・記述する結果を得た。ここで扱った群  $N_{6,28}$  は、既知の例よりもユニタリ双対の位相が複雑であり、このような新しい例において完全な計算結果を得ることは、今後一般の構造理論を構築するための重要な手がかりとなる。なお、この共同研究は「研究開始当初の背景(2)」の共同研究から継続しており、本研究期間中に仕上げ論文を発表した。(雑誌論文、雑誌論文)

(2) $L^p$  フーリエ変換の解析:「研究の方法(2)」に記載したように、Baklouti 氏と共同で研究を行い、対象とする群  $G$  が一般のユニモジュラー  $I$  型リー群  $N$  とこれに作用するコンパクト群  $K$  との半直積群の場合に、 $L^p$  フーリエ変換のノルムが半直積因子の群  $N$  のノルムを用いて上から評価されるという結果を得て、4th Tunisian-Japanese Conference で講演発表した。(学会発表) また国内では「2015 年度表現論ワークショップ」(学会発表) で講演を行った。一般に半直積群に関しては、Klein-Russo により、 $p$  の共役指数  $q$  が偶数の場合に  $L^p$  フーリエ変換のノルムの上からの評価が得られており(「研究開始当初の背景(3)」)これを適用すれば  $q$  が偶数の場合、 $G$  の  $L^p$  フーリエ変換のノルムが  $N$  のノルムで上から評価される。これに対して本研究では、1 と 2 の間にある全ての指数  $p$  に対する結果である点で意義がある。上からの評価のみならずノルムの値を決定することは今後の課題である。

(3)指数型可解リー群における、一般の複素解析的誘導表現の構成と分解: 指数型可解リー群において、リー環の実線型形式  $f$  をとりリー環の複素化に線型に拡張し、これに付随する反対称双線型形式  $B_f$  に関して等方的な複素部分リー環  $\mathfrak{h}$  をとる。このときモジュラー関数に付随する補正項 を加味して、組  $(f, \mathfrak{h}, \cdot)$  から複素解析的誘導表現 が定義される。ここで  $B_f$  に関して等方的な部分リー環  $\mathfrak{h}$  は、以下の条件 1 を満たすとき、 $f$  における weak polarization であるといい、条件 1 と以下の条件 2 を共に満たすとき polarization であるという。

条件 1:「 $\mathfrak{h}$  は  $B_f$  に関して極大等方的である。」  
条件 2:「 $\mathfrak{h}$  とその複素共役空間  $\mathfrak{h}^-$  の和空間  $\mathfrak{h}+\mathfrak{h}^-$  は部分リー環となる。」

段階誘導を適用すれば、一般の複素解析的誘導表現を扱うためには条件 2 を満たさない場合のうち、

条件 3:「和空間  $\mathfrak{h}+\mathfrak{h}^-$  がリー環として  $G$  のリー環の複素化全体を生成する。」

を満たす場合を調べることが基本的である。そこで本研究では対象とする群  $G$  をベクトル群  $R^n$  とこれに(指数型に)作用する実数の群  $R$  との指数型半直積群  $G=R \ltimes R^n$  とし、1 次元の複素部分リー環  $\mathfrak{h}$  で、「条件 3」を満たすものがあると仮定した。この時さらにリー環にお

いて  $R$  の随伴作用が技術的なある条件を満たすことを仮定した群  $G$  に対しては、補正項を適切に選ぶと零でない表現が構成されることを示し、既約分解に関する以下の結果を得た。定義により  $\rho$  は  $G$  の正則表現の部分表現となるが、プランシュレル測度に関して殆ど全ての既約表現に対してそれぞれ軌道法による実現の下、組  $(f, h, \rho)$  に関する半不変超関数ベクトルの空間を決定した。そしてこの空間は 1 次元の空間または  $\{0\}$  であることを示した。次に構成された複素解析的誘導表現  $\rho$  が、 $G$  の無限次元既約表現のうち半不変超関数ベクトルが 1 次元の空間をなす表現の無重複な直積分に分解することを示した。以上の結果は雑誌論文で発表した。この結果は「条件 2」とは対照的な設定での、零でない複素解析的誘導表現を与える新しい例である。また、この既約分解は群  $G$  の代数的な構造に関する情報を用いて記述されるが、具体的な計算結果が得られた点でも意義がある。一方、余随伴軌道の幾何との関連を見出すことは今後の課題である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Junko Inoue, Ying-Fen Lin and Jean Ludwig, A class of almost  $C_0(K)$ - $C^*$ -algebras, J. Math. Soc. Japan, 査読有り, Vol. 68 (2016), 71-89.  
DOI: 10.2969/jmsj/06810071

Junko Inoue, Holomorphically induced representations of exponential solvable semi-direct product groups  $R \times R^n$ , Adv. Pure Appl. Math., 査読有り, Vol. 6 (2015), 113-123.  
DOI: 10.1515/apam-2015-5005

J. Inoue, Y.-F. Lin, J. Ludwig, The solvable Lie group  $N_{6,28}$ : An example of an almost  $C_0(K)$ - $C^*$ -algebra, Adv. Math., 査読有り, Vol. 272 (2015), 252-307.  
DOI: 10.1016/j.aim.2014.12.001

[学会発表](計 11 件)

井上順子, 可解リー群における複素解析的誘導表現, 2016 年度表現論ワークショップ, 2017 年 1 月 7 日, 鳥取県立生涯学習センター(県民ふれあい会館)(鳥取県・鳥取市).

井上順子, ある指数型可解 Lie 群における複素解析的誘導表現, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016 年 9 月 17 日, 関西大学(大阪府・吹田市).

井上順子, Lie 群上の  $L^p$ -Fourier 変換のノルムについて, 2015 年度表現論ワークショップ, 2016 年 1 月 10 日, 鳥取県立生涯学習センター(県民ふれあい会館)(鳥取県・鳥取市).

Junko Inoue,  $L^p$ -Fourier transforms on compact extensions of unimodular Lie groups, 4th Tunisian-Japanese Conference Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications in Honor of Professor Jean Ludwig, 2015 年 12 月 21 日, Monastir (Tunisia).

Junko Inoue, Holomorphically induced representations of exponential solvable semi-direct product groups  $R \times R^n$ , Seminar at Sfax University, 2015 年 9 月 21 日, Sfax University, Sfax (Tunisia)

井上順子, 指数型可解半直積群  $R \times R^n$  の複素解析的誘導表現の構成と既約分解, 研究会「不変性と双対性」, 2015 年 9 月 8 日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市).  
井上順子, 指数型可解半直積群  $R \times R^n$  の複素解析的誘導表現, 2014 年度表現論ワークショップ, 2014 年 12 月 27 日, 鳥取県立生涯学習センター(県民ふれあい会館)(鳥取県・鳥取市).

井上順子, 可解リー群の複素解析的誘導表現: 広い意味での複素解析的誘導表現の構成と既約分解の例, 松木敏彦先生を囲む表現論研究集会, 2014 年 2 月 9 日, 鳥取県立生涯学習センター(県民ふれあい会館)(鳥取県・鳥取市).

Junko Inoue, Holomorphically induced representations of some exponential solvable Lie groups, Third Tunisian-Japanese Conference: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications in Honor of Professor Hidenori Fujiwara, 2013 年 12 月 18 日, Hammamet (Tunisia).

井上順子, 可解 Lie 群の複素解析的誘導表現について, 2013 年度表現論ワークショップ, 2013 年 9 月 12 日, 京都大学大学院理学研究科セミナーハウス(京都市).

井上順子, 可解 Lie 群の複素解析的誘導表現について, RIMS 研究集会「表現論および表現論の関連する諸分野の発展」, 2013 年 6 月 26 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

井上 順子 (INOUE, Junko)

鳥取大学・大学教育支援機構・准教授

研究者番号: 40243886

(2) 研究分担者

なし