様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月 19 日現在

機関番号：82723
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：25400122

研究課題名（和文）トロピカル化された可積分系の相空間構造の解明

研究課題名（英文）Clarification of the phase space structure of the tropical integrable systems

研究代表者

高木　太一郎（Takagi, Taichiro）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・応用科学群・教授

研究者番号：00531766

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：古典可積分系の模型として古くから知られている戸田格子の変種である離散周期戸田格子のトロピカル化によって定義されるトロピカル周期戸田格子について、その等位集合構造の解明につながると考えられるいくつかの性質を解明した。特に、離散周期戸田格子のラックス形式をもとに定義されるこの力学系の保存量から決まるヤング図形と量子スピン鎖のベーテ仮説で用いられる組合せ論において定義されるヤング図形の連続化が一致していることを示した。また、同じ可積分系ではあるがやや異なる種類の問題を考え、視野を広げることによって研究のブレイクスルーを探る過程において、共形場理論の一般化されたウィックの定理に関する新しい知見を得た。

研究成果の概要（英文）：We clarified several properties of the phase space structures of the tropical periodic Toda lattice. This model is defined as a tropical limit of the discrete periodic Toda lattice, a variation of the Toda lattice which is one of the most famous models in the field of classical integrable systems. Especially, we proved that the Young diagrams defined through the Lax representation of the discrete periodic Toda lattice coincide with the Young diagrams defined as continuous limits of the corresponding diagrams defined in the combinatorial theory of the Bethe ansatz of the quantum spin chains. In addition, during a process of widening the author's vision to find a breakthrough in future studies, we considered somehow different kind of problems in the field of integrable systems and found a new result on generalized Wick theorems in conformal field theory.

研究分野：数理物理学

キーワード：可積分系　組合せ論　離散戸田格子　トロピカル幾何学　ソリトン　ベーテ仮説　共形場理論

１．研究開始当初の背景

（１）トロピカル幾何学は代数多様体を区分的線形な対象に置き換えて得られる代数幾何学である。2010 年前後において、数理物理の国際会議ではトロピカル幾何学と可積分系との関連が盛んに議論されていた。ヤコビ多様体やリーマン・テータ関数のトロピカル幾何学における類似物（Mikhalkin・Zharkov 2008）との関連において、この文脈で議論される力学系の典型例がいわゆる超離散周期戸田格子であった。

（２）超離散周期戸田格子は、周期戸田格子において時間変数を離散化した非線形力学系（離散周期戸田格子）にある極限操作を施して得られる（君嶋・時弘 2002）。ここでは、通常超離散化と呼ばれる上述の極限操作がより適切にはトロピカル化と呼ばれるべきであるとの考えに基づきこの力学系をトロピカル周期戸田格子と呼ぶことにする。代数曲線に対応するトロピカル曲線による記述を用いて、この力学系の等位集合が実トーラスになることが知られていた（井上・竹縄 2008）。しかし、ここでは generic 条件とよばれる条件が課されていた。この条件は、後に述べる周期箱玉系と呼ばれる可積分セルオートマトンの文脈では、ソリトン（孤立波）の振幅がすべて異なるという条件で記述される。すなわち、同じ振幅のソリトンが複数存在する場合については、トロピカル周期戸田格子の等位集合構造は解明されていなかった。

（３）一方、トロピカル周期戸田格子において従属変数を自然数に限定した周期箱玉系においては、generic 条件を満たさない場合にも等位集合構造が以下のように解明されていた。すなわち、この系には可換な時間発展の族が構成されており、一つの等位集合に属するセルオートマトンの状態たちを節点で、一般化された時間発展たちを矢印で表したグラフを考えると、generic 条件が満たされている場合はこのグラフが前節で述べた実トーラスの上に乗っている。さらに、generic 条件を満たさない場合にはグラフがいくつかの連結成分に分かれていて、それぞれが別の実トーラス上に乗っているという描像が得られていた。各連結成分に対応するトーラスのサイズは、同じ振幅をもつソリトンたちの相互の位置関係から定まる内部対称性が大きいほど小さくなるということも分かっていた。ここでは著者らの以前の研究成果である可積分量子スピン鎖のベーテ仮説の組合せ論および量子群の結晶基底による記述を用いており、従属変数を自然数に限定することが本質的であった。

（４）まとめると、トロピカル周期戸田格子の等位集合の構造は、generic 条件が課された場合か、またはこの条件は課されないが従属変数が自然数に限定された場合にしか知られておらず、一般の場合には解明されていなかった。この力学系がトロピカル幾何学と可積分系を結び付ける研究において果たす役割の重要性を考えると、これは大きな理論上の不備であると考えられた。これに対し、著者は、トロピカル周期戸田格子に対しても周期箱玉系の場合と同様に可換な時間発展の族を構成できることを示しており、この研究を発展させることにより等位集合の構造をすべて解明できるのではないかと期待された。

２．研究の目的

離散周期戸田格子のトロピカル化であるトロピカル周期戸田格子について、generic 条件と呼ばれる条件を課さない一般の場合に対しても有効であるような等位集合の記述法を開発し、その構造を解明する。この力学系はアフィン・リー環 $A^{(1)}_1$ の（結晶化された）量子群対称性をもつ可積分セルオートマトンの連続化であるので、$A^{(1)}_n$ の対称性へ拡張した一般化を行い、その可換な時間発展の族を構成し、その等位集合構造を可換な時間発展をもとに解明する。さらに、より一般のトロピカル化された可積分系について、その等位集合構造を特徴づける基本定理（アーノルド・リウビルの定理の類似）を定式化するということが研究開始当初の目的であった。

３．研究の方法

現代的な数理物理学の研究手法として標準的かつ効率的と考えられる以下のような方法をとった。

（１）最新の論文や専門書を読み、紙と鉛筆をつかって計算や論証を行い、理論的な考察を深めた。

（２）統計力学、可積分系および非線形発展方程式に関する国際会議や研究会で国内外の研究者と交流し、研究上の議論や情報交換を行なって視野を広めつつ問題解決に使えそうな手法の探索および開発を行った。

（３）計算機の数式処理システムを利用し、種々の離散力学系を計算機上で実現した。多数の例を作って観察することにより、数学的な定理を予想した。予想の一部は紙と鉛筆を使った理論的な考察により証明された。

４．研究成果

（１）トロピカル周期戸田格子の組合せ論的側面に関して、以下に示すようないくつかの新しい結果を得た（論文②）。

①実トーラスによる等位集合の記述の前提である generic 条件がどの程度強い条件であるかを以下のようにして明確に示した。まず、トロピカル化をする前の離散周期戸田格子について、通常は２種類の文字を使用して記述される従属変数たちを１種類の文字の添え字の偶奇で区別するというアイデアにより、ラックス形式から得られる保存量の最近接排他表現を従来の方法よりも明快に導出した。この記法では離散戸田格子の発展方程式は次のように書かれる：

$$\bar{a}_{2n-1}+\bar{a}_{2n}=a_{2n}+a_{2n+1},\quad \bar{a}_{2n}\bar{a}_{2n+1}=a_{2n+1}a_{2n+2}.$$

ここで従属変数 a の下付きの添え字は離散的な位置を表し、mod 2N で周期的にとる。時間変数については、上にバーをつけたものが t+1 で、そうでないものは t としている。非自明な解として以下のものがある。

$$\bar{a}_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}\frac{1-\prod_{l=1}^{N}(a_{2l-1}/a_{2l})}{\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{l=1}^{k}(a_{2(n-l)+1}/a_{2(n-l)})},$$
$$\bar{a}_{2n+1}=a_{2n+1}a_{2n+2}/\bar{a}_{2n}.$$

離散周期戸田格子をラックス形式で記述し、ラックス行列の特性多項式を考察することにより、N+1 個の保存量が次のような表示で表されることが分かる。

$$h_k=\sum_{\substack{1\le i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_k\le 2N\\(i_1,i_k)\neq(1,2N)}}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k},$$

for $1\le k\le N$ and $h_{N+1}=\prod_{i=1}^{2N}a_i$, where $i\lhd j\Leftrightarrow i+1<j$.

すなわち、添え字の整数の値が異なり、かつ（mod 2N で考えて）隣接しないような「最近接排他条件」を満たす従属変数 k 個の積すべての和が k 番目の保存量となる。

　これをトロピカル化して得られるトロピカル周期戸田格子では、積が和に、和が min に置き換わるため対応する保存量は次のように書ける。

$$H_k=\min_{\substack{1\le i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_k\le 2N\\(i_1,i_k)\neq(1,2N)}}(A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots+A_{i_k}),$$

for $1\le k\le N$ and $H_{N+1}=\sum_{i=1}^{2N}A_i$, where $i\lhd j\Leftrightarrow i+1<j$.

ここでは対応する従属変数を A で表した。周期箱玉系の場合に用いた、量子スピン鎖のベーテ仮説の組合せ論のアイデアを思い出すと、この保存量たちはヤング図形（の連続化）と関係づけられるべきである。このことを、上に掲げた最近接排他条件のみを仮定して示すことができた。1 番目の主結果となる定理を以下に記す：

Theorem

For $(A_1,\dots,A_{2N})\in(\mathbb{R}_{>0})^{2N}$ let $H_0=0$ and

$$H_k=\min_{\substack{1\le i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_k\le 2N\\(i_1,i_k)\neq(1,2N)}}(A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots+A_{i_k}),$$

for $1\le k\le N$, where $i\lhd j\Leftrightarrow i+1<j$. Then the relations $H_k+H_{k+2}\ge 2H_{k+1}$ are satisfied for $0\le k\le N-2$.

すなわち、保存量たちは「弱い凸性」を満たす。この定理により、H_{N+1-i} と H_{N-i} の差を、ヤング図形の i 行目とみなすことができる。この結果、上に述べた generic 条件は「強い凸性」に相当し、ヤング図形の腕の長さに重複度がない場合を表すということが明らかになった。以下に「最近接排他条件」から保存量が容易に読み取れる例を挙げる：

Example

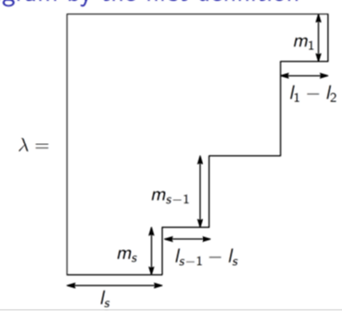
For $N=6$, let $A_1=5, A_2=A_{12}=3, A_3=A_8=A_{11}=2, A_4=A_5=A_6=A_7=A_9=A_{10}=1$. Then we have:

$$(A_1,\dots,A_{12})=(5,3,2,1,1,1,1,2,1,1,2,3),$$
$$H_1=1,\quad H_2=2,\quad H_3=3,$$
$$H_4=5,\quad H_5=7,$$
$$H_6=11\qquad (=\sum_{i=1}^{6}A_{2i}).$$

and $l_1=4, l_2=2, l_3=1, m_1=1, m_2=2, m_3=3$.

ここで最後の行は、対応するヤング図形について腕の長さを大きいものから $l_1,l_2,\dots$, それらの重複度を $m_1,m_2,\dots$ と記述することを意味している。一般の場合に戻ると次のようなヤング図形となる：

Young diagram by the first definition



②以上の考察は、離散周期戸田格子のラックス形式をその議論の出発点とするものであった。これとは対照的に、周期箱玉系の結晶基底による定式化を連続化する試みからは以下の成果が得られた。この定式化の鍵となるのは、ベーテ仮説の組合せ論に登場する Kerov-Kirillov-Reshetikhin（KKR）全単射と呼ばれる写像である。これは最高ウェイトパスと呼ばれる数列から、艤装配位と呼ばれる組合せ論的対象への写像である。艤装配位はヤング図形の各行に量子数と呼ばれる非負整数を付したものである。アフィン・リー環 $A^{(1)}_1$ の場合について、以下のようにその非自明な連続化を得ることができた。最高ウェイトパスはこの場合は１，２からなる数列であるが、これを左端からの連続する１の個数、２の個数、…、というデータで記述し、個数を表す自然数を正の実数に一般化する（これはトロピカル周期戸田格子の従属変数とみなせる）。一方、艤装配位の方はヤング図形の腕の長さおよび量子数を、自然数から実数に一般化する。このように一般化した最高ウェイトパスの集合と艤装配位の集合の間に自然な全単射が存在するかどうか、もし存在したとしてそれを具体的に記述できるかということは非自明な問題である。本論文ではそれが可能であり、具体的に記述できることを証明した。これが 2 番目の主結果である。以下での議論のため、艤装配位のデータのうちヤング図形の構成方法について、上に挙げたラックス形式由来の保存量の計算に用いた例に対応する例を示す（自然数から実数への一般化を行ったのであるが、記述の

簡単さのためここでは自然数の例を挙げている)：

Example

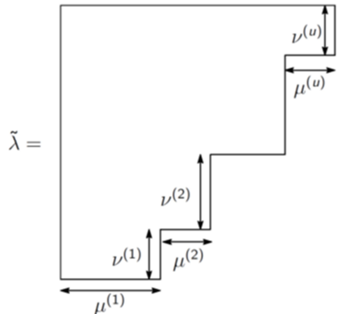
We have:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= (5,3,2,1,1,1,1,2,1,1,2,3),\\
y^{(1)} &= (4,2,1,0,0,0,0,1,0,0,1,2),\\
x^{(2)} &= (4,2,1,1,1,2),\\
y^{(2)} &= (3,1,0,0,0,1),\\
x^{(3)} &= (3,2),\\
y^{(3)} &= (1,0),
\end{aligned}
$$

$$\mu^{(1)} = 1, \mu^{(2)} = 1, \mu^{(3)} = 2, \nu^{(1)} = 3, \nu^{(2)} = 2, \nu^{(3)} = 1.$$

ここでは$x^{(i)}$の各成分から、最小の成分を引いたものが$y^{(i)}$である。また、$y^{(i)}$の中で偶数個の連続した０を取り除き、奇数個の連続した０は取り除いてその両隣の数字を足したもの（左隣しかなければそれも取り除く）が$x^{(i+1)}$である。$x^{(i)}$の最小の成分である実数を$\mu^{(i)}$、$y^{(i)}$と$x^{(i+1)}$の成分数の差の半分である自然数を$\nu^{(i)}$とすると、これらの数字は一般に次のようなヤング図形を定める：

Young diagram by the second definition



この KKR 全単射の連続化の結果については代数的組合せ論の研究者から興味を持たれており、国内外の学会に対して一定のインパクトを与えていると思われる。今後の展望としては $A^{(1)}_n$ への一般化が期待される。

③$A^{(1)}_1$ の場合、連続化する前の KKR 全単射のうち最高ウェイトパスからヤング図形を構成するアルゴリズムの部分は、箱玉系の文脈での 10-elimination と呼ばれるものと実質的に同じである。この場合に作られるヤング図形が離散戸田格子のラックス形式に由来する前述のヤング図形に一致することについては先行研究がある。ただし、この研究には不完全あるいは誤りと思われる記述が含まれていた。そこで、この不備をなくし、さらに箱玉系に限定されない一般のトロピカル周期戸田格子の場合に、上述の例で挙げた 2 種類のヤング図形（ラックス形式によるものと、連続化した KKR 全単射によるもの）が一致することを証明した。これが３番目の主結果である。この結果、特に後者のヤング図形が保存量になることが証明された。これはトロピカル周期戸田格子の等位集合構造を解明するための重要な第一歩と考えられるが、今後の展望については以下に述べるような困難があることが分かった。

（２）共形場理論の一般化された Wick の定理に関する新しい結果を得た（論文①）。

当初予期していなかったことであるが、トロピカル周期戸田格子の等位集合構造の研究を続けていく過程において次のような困難が浮上した。この系の可換な時間発展の族は、周期箱玉系の量子群による定式化における対応物を自然に連続化して得られたものである。しかし、この時間発展族のアルゴリズム自体を虚心坦懐に眺めてみると、力学系としてかなり不自然なものであると言わざるを得ない。そのためにこの系の研究の意義に対する疑問が生じることになった。そこで、同じ可積分系ではあるがやや異なる種類の問題を考え、視野を広げることによって研究のブレイクスルーを探ることにした。

2 次元共形場理論において次式は一般化された Wick の定理として知られている（Bais et al 1987）。

$$\overline{A(z)(BC)}(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{dx}{x-w}\left\{\overline{A(z)B(x)}C(w) + B(x)\overline{A(z)C(w)}\right\}$$

ここで A(z)などは自由場に限定されない一般的な場の演算子であり、(BC)(w) = :B(w)C(w): は正規順序積により合成された場、上に鉤をつけた A(z)B(x) は縮約すなわち演算子積展開の特異部分を表す。また積分路は w のまわりを小さく１周するものである。この公式は、単独の場に合成された場を右からかけた演算子積展開の特異部分を、合成される前の場との演算子積展開をもちいて積分表示したものであり、実際の計算に広く応用されている。

一方、合成された場を左からかけた場合も同じような形の積分表示式が存在するかどうかというのは自然な問いであり、相互作用のある場に対してそれは非自明な問いであるのだが、意外なことに今日までその答えは知られていなかった。これに対する答えとして、われわれは以下の公式を提案した。

$$\overline{(AB)(z)C}(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{dx}{z-x}\left\{:A(x)\overline{B(x)C(w)}: + B(x)\overline{A(x)C(w)}\right\}$$

被積分関数における縮約すなわち鉤をかけた B(x)C(w)および A(x)C(w)の展開係数は引数が w の場であり、それらと引数が x の場である A(x)または B(x)との演算子展開は意味を成す。右辺第１項の正規順序: :はその演算子積展開から特異部分を引き去る操作を表す。

われわれは２通りの証明を与えた。それぞれ代数的および解析的証明と呼ぶ。いずれも場の演算子は正負の冪をともに無限に含む形式的級数をもちいて定式化されるが、後者ではしかるべき方法で行列要素をとって複素関数として扱う。代数的な方法は右辺の被積分関数の演算子積展開に対して複素関数論の留数定理を形式的に適用して積分を実行し、左辺と比較することによってなされる。その結果、２つの Wick の定理はいずれも頂

点代数の公理の１つである Borcherds 恒等式

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(A(w)_{(r+i)}B(w))_{(p+q-i)}C(w)$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r}{i}(A(w)_{(p+r-i)}(B(w)_{(q+i)}C(w))$$
$$-(-1)^r B(w)_{(q+r-i)}(A(w)_{(p+i)}C(w)))$$

の特殊ケースと一致することが分かり証明が完結する。ここで任意の整数 n に対して $A(w)_{(n)}B(w)$はｎ次の（留数）積と呼ばれる積である（松尾・永友 1999）。より具体的にいうと、われわれの公式は次のような特殊化に対応するものである。

Borcherds Identity with $p=0, r=-1, q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$(A(w)_{(-1)}B(w))_{(q)}C(w)=\sum_{i=0}^{\infty}(A(w)_{(-i-1)}(B(w)_{(q+i)}C(w))$$
$$+B(w)_{(q-i-1)}(A(w)_{(i)}C(w)))$$

われわれの公式はすべての自然数ｑに対するこの公式のある種の母関数になっている。Borcherds 恒等式自体は1980 年代から知られていた結果であり、この特殊ケースも共形場理論の演算子展開の実際の計算に使われていたものである(Thielemans 1994)。誤解がないように強調しておくと、いったん積分表示による母関数が得られれば上記の無限和の公式は積分の計算を実行するだけで得られるものの、上記の無限和の公式だけが知られているときにその母関数が単純な積分表示で表されることを予測することは全く非自明なことである。Bais たちの積分表示式の左右入れ換えバージョンであるわれわれの積分表示式が、彼らの結果から 30 年近く経っても知られていなかったことはある種の驚きであるが、これは上に述べたような非自明性の現れであるといえよう。結果は国内外の学会において発表し、参加者との議論から一定の評価を得ているものと思われる。ただし上に述べた非自明性が理解されなかったため証明の詳細を記述した主論文はいまだ学術誌への掲載に至っていない。一方、ロシアで開催された国際会議のプロシーディングスへ寄稿した論文は掲載決定している。

解析的な方法は左辺の行列要素を複素変数の２重積分で表し、積分路を適切に変形してから積分を一つ実行することによってなされる。その結果、右辺の被積分関数の行列要素の積分という形が自然に導出される。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Taichiro Takagi, A new generalized Wick theorem in conformal field theory, Theoretical and Mathematical Physics, 査読有, 印刷中

② Taichiro Takagi, Combinatorial aspects of the tropical periodic Toda lattice, Journal of Physics A, 査読有, Vol.47, 2014, 395201(25pp)

〔学会発表〕（計８件）

① 高木太一郎, 共形場理論における一般化された Wick の定理と Borcherds 恒等式, 日本物理学会第 72 回年次大会, 2017 年 3 月 20 日, 大阪大学豊中キャンパス

② 高木太一郎, 吉川 拓真, 共形場理論における一般化された Wick の定理と Borcherds 恒等式, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016 年 9 月 16 日, 関西大学

③ Taichiro Takagi, Generalized Wick theorems in conformal field theory and the Borcherds identity, Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, 2016 年 7 月 12 日, Euler International Mathematical Institute (ロシア)

④ Taichiro Takagi, Young diagrams associated with the tropical periodic Toda lattice, Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems 2015, 2015 年 5 月 27 日, Santa Margherita di Pula（イタリア）

⑤ 高木太一郎, トロピカル周期戸田格子と Kerov-Kirillov-Reshetikhin 全単射, 日本数学会 2015 年度年会, 2015 年 3 月 24 日, 明治大学

⑥ 高木太一郎, トロピカル周期戸田格子の保存量とその最近接排他表現, 日本物理学会第 69 回年次大会, 2014 年 3 月 27 日, 東海大学

⑦ Taichiro Takagi, Commuting Phase Flows in the Tropical Periodic Toda Lattice, XXV IUPAP International Conference on Statistical Physics, 2013 年 7 月 23 日, Seoul National University（大韓民国）

⑧ Taichiro Takagi, Commuting phase flows in the tropical periodic Toda lattice, Conference on Nonlinear Mathematical Physics: Twenty Years of JNMP, 2013 年 6 月 10 日, The Sophus Lie Conference Center（ノルウェー）

６．研究組織

(1)研究代表者

高木 太一郎（TAKAGI TAICHIRO）

防衛大学校・応用科学群・教授

研究者番号：00531766