

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：11201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400124

研究課題名(和文)バナッハ空間における直交分解とその数学的諸分野への応用

研究課題名(英文)The orthogonal decomposition of Banach spaces and its applications

研究代表者

本田 卓 (Honda, Takashi)

岩手大学・教育学部・准教授

研究者番号：30633531

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、代表者が高橋渉氏との共同研究で、2009年にヒルベルト空間での直交分解をバナッハ空間に拡張することに成功したことを基に、バナッハ空間での線形非拡大射影の像が収束するための条件を導いた。線形非拡大射影は確率論における条件付き期待値に相当する。バナッハ空間での線形非拡大射影の半群は、確率的な摂動のある力学系の分布の変化を表現することにも利用され、これについては、岩田氏との共同研究としてSpringer Proceedings in Mathematics & Statisticsに掲載された。また、解析的数論におけるゴールドバッハの予想に関する成果も得られた。

研究成果の概要(英文)：This research is based on the extension of the orthogonal decomposition of a Hilbert space to a Banach space which was showed by Prof. Takahashi and us. In this research, we showed the condition of retracts onto which the images of linear contractive projections which map the whole space converges. A linear contractive projection in a Banach space is applied to probability theory as a conditional expectation. The behavior of a distribution induced by a stochastically perturbed dynamical system is represented as a semigroup of contractive linear operator on a Banach space. We and Prof. Iwata obtain results concerned with the behavior of a distribution induced by a stochastically perturbed dynamical system and they are published in "Springer Proceedings in Mathematics & Statistics". We also obtain results about Goldbach's conjecture in analytic number theory.

研究分野：関数解析

キーワード：バナッハ空間 解析的数論 直交補空間分解 線形射影 ゴールドバッハの予想

### 1. 研究開始当初の背景

関数空間における射影は、代表的なものでは確率論での条件付き期待値、ヒルベルト空間での直交射影、最適化理論等で有用な距離射影(最も近い点への射影、最良近似)など、関数空間での写像の中で最も重要なものの一つである。関数環論でも線形射影は重要な役割を演じている。線形非拡大射影に関しては B. Randrianantoanina, Norm one projections in Banach spaces, Taiwanese J. Math. 5 (2001), 5-95, 非線形非拡大射影に関しては E. Kopecka and S. Reich, Nonexpansive retracts in Banach spaces, Fixed point theory and its applications, Banach Center Publ., 77, 161-174, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2007.などのサーベイに今までの研究がまとめられている。代表者は高橋渉氏との共同研究で、2009年にヒルベルト空間での直交分解をバナッハ空間に拡張することに成功した。ここでの直交はパーコフ・ジェームズの直交を意味する。この分解は、バナッハ空間とヒルベルト空間との性質の橋渡しをするもので、バナッハ空間の幾何学的性質に由来している。バナッハ空間における直交分解の発見により、今まで独立なものと考えられていた、バナッハ空間での複数の(非線形)射影が、実は互いに関連し合っていることが発見されている。

### 2. 研究の目的

バナッハ空間における種々の非線形射影(非拡大射影、距離射影、一般化射影、一般化非拡大射影)のお互いの関係を明らかにし、バナッハ空間の構造を明らかにする。また、これらの射影を用いて、ヒルベルト空間で重要な概念である直交分解をバナッハ空間に拡張する。これらの結果を用い、エルゴード理論、条件付き期待値作用素、関数環論等の線形射影、縮小写像に関する未解決問題を解明する。また、解析的数論の視点から、ゴールドバッハの予想について新しい成果を導く。

### 3. 研究の方法

本研究は、バナッハ空間の直交分解とその応用を主要な目的とする研究で、その目的の達成のため、本田が研究代表者となり、同じ学部にも所属する教授・川田浩一氏を研究分担者とし、この二名で研究組織を構成した。代表者が関数解析的手法について考察し、川田氏は、数論的手法を担当し、幅広い知見を結集した。適宜、連携研究者として岩田友紀子氏(気象大学校、東北学院大学)の知見を仰いだ。氏はエルゴード理論への応用について考察した。

### 4. 研究成果

(1) バナッハ空間の直交分解と de Leeuw-Glicksberg 分解定理を用い、M. Lir(イ

スラエル)が示した線形非拡大作用素の群における定理を可換線形非拡大半群にまで拡張した研究代表者が得た結果を、非可換半群にまで拡張することを試みた。条件付きだが、非可換半群にまで適用できることが示され、2013年6月にスペインで催された国際研究集会 Operators on Banach Spaces、2013年8月に弘前で催された国際研究集会 The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013)、2013年12月に台湾で催された国際研究集会 The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (ICNAO2013)でその結果を本田が講演した。

(2) 直交分解を線形射影の収束定理に応用した研究を行い、その結果を2015年1月にタイで催された国際研究集会 The Ninth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2015)で川田と本田が指導している修士の院生と本田が講演し、学術論文 Convergence theorems of linear contractive projections in Banach spaces (Proceedings of The Ninth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis)として出版された。この結果は、確率論における条件付き期待値がレトラクトとなる線形部分空間が変化するとき、どのような条件で収束するのかを示しており、マルチンゲールの収束定理の拡張になっている。

(3) 直交分解を確率過程を表すマルコフ作用素の半群における分解定理に応用した研究を本田が中心に行い、その結果を、7月に大阪府立大学で催された国際研究集会 The 22nd International Conference on Difference Equations and Applications(ICDEA2016)において、岩田氏(気象大学校、東北学院大学)との共同研究として、8月に新潟で催された国際研究集会 The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia 2016)において、本田の単独研究として発表した。これらは、確率的な摂動を含む力学系の解析に、Jacobs-de Leeuw-Glicksbergの分解定理を応用した Sine の結果を参考に、実、複素バナッハ空間の両方で、Sine の結果の拡張を試みたもので、半群の挙動が異なる線形部分空間の直和にバナッハ空間自体を分解するものだが、この分解にバナッハ空間の直交分解が応用されている。Springer Proceedings in Mathematics & Statistics の Advances in Difference Equations and Discrete Dynamical Systems に Operator Theoretic Phenomena of the Markov Operators which are Induced by Stochastic Difference Equations として掲載された。

(4) 数論的見地では、川田が2013年10月に

ドイツで開催された国際研究集会 Analytic Number Theory で数論に関する現段階での関連成果を発表し、京都大学数理解析研究所講究録別冊にその成果が「Goldbach 問題 --- 3 つの素数の和について」として出版された。川田が数論を中心とした研究を行い、L. Zahao との共同研究が投稿中である。また、数学セミナー、2017 年 6 月号に「3 つの素数の 3 乗の和の話」、数理科学、2017 年 9 月号に「ゴールドバッハ予想と円周法」として論文が掲載された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

<sup>1</sup> 川田浩一, ゴールドバッハ予想と円周法, 数理科学, 査読無, 2017 年 9 月号, 2017, 51-57

<sup>2</sup> 川田浩一, 3 つの素数の 3 乗の和の話, 数学セミナー, 査読無, 2017 年 6 月号, 2017, 42-47

<sup>3</sup> Takashi Honda and Yukiko Iwata, Operator Theoretic Phenomena of the Markov Operators which are Induced by Stochastic Difference Equations, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, 212, 2017, 125-135, DOI: 10.1007/978-981-10-6409-8\_7

<sup>4</sup> 川田浩一, Goldbach 問題 --- 3 つの素数の和について, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 査読有, B53, 2016, 251-278

<sup>5</sup> Takashi Honda and Shogo Kamino, Convergence theorems of linear contractive projections in Banach spaces, Proceedings of The Ninth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 査読有, 9, 2016, 131-141

[学会発表](計 8 件)

<sup>1</sup> Takashi Honda, Some decomposition theorems of semigroups of linear contractive operators on Banach spaces, The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia 2016), 2016

<sup>2</sup> Takashi Honda and Yukiko Iwata, Operator theoretic phenomena of the Markov operators which are induced by stochastic difference equations, The 22nd International Conference on Difference Equations and Applications, 2016

<sup>3</sup> Takashi Honda and Shogo Kamino, CONVERGENCE THEOREMS OF LINEAR CONTRACTIVE PROJECTIONS IN BANACH SPACES, The Ninth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2015), 2015

<sup>4</sup> Takashi Honda, The Orthogonal Decomposition in Banach Spaces and Its Applications, The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (ICNAO 2013), 2013

<sup>5</sup> Koichi Kawada, The ternary Goldbach problem --- from Hardy-Littlewood, Vinogradov to Helfgott, 代数的整数論とその周辺, 2013

<sup>6</sup> Koichi Kawada, On sums of cubes of primes and almost primes, Analytic Number Theory, 2013

<sup>7</sup> Takashi Honda, The orthogonal decomposition of Banach spaces and convergence theorems of a linear operator, The eighth international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), 2013

<sup>8</sup> Takashi Honda, The orthogonal decomposition of Banach spaces and its application to contractive semigroups, Operators on Banach Spaces, 2013 [図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

本田 卓 (HONDA, Takashi)  
岩手大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 3 0 6 3 3 5 3 1

##### (2) 研究分担者

川田 浩一 (KAWADA, Koichi)  
岩手大学・教育学部・教授  
研究者番号: 7 0 2 7 1 8 3 0

(3)連携研究者

岩田 友紀子 (IWATA, Yukiko)  
東北学院大学・教養学部・准教授  
研究者番号：60466456

(4)研究協力者

神野 照悟 (KAMINO, Shogo)