

令和 2 年 6 月 29 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2019

課題番号：25400127

研究課題名（和文）無限次元タイヒミュラー空間の幾何構造の構築

研究課題名（英文）Construction of geometric structure for infinite dimensional Teichmuller space

研究代表者

藤川 英華（Fujikawa, Ege）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：80433788

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,800,000円

研究成果の概要（和文）：一般の無限型リーマン面に対するタイヒミュラー空間上の力学系理論を考察するため、タイヒミュラー空間の商空間である漸近的タイヒミュラー空間の各ファイバー上での作用に着目し、擬等角写像類群の停留的な部分群に対して、不連続性が一様に起こることを証明した。また、フラクタル構造に付随する無限可算点配置から得られるタイヒミュラー空間の定式化を完成させ、標準的な幾何学的有界性のもとでは、そのようなタイヒミュラー空間が複素構造を許容することを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

タイヒミュラー空間は曲面の構造のパラメーター空間として、数学の諸分野や数理物理学の研究において重要な役割をもっている。有限型リーマン面に対する有限次元タイヒミュラー空間上とは異なり、無限型リーマン面に対する無限次元タイヒミュラー空間上では、タイヒミュラーモジュラー群の作用の様相は極めて複雑だが、その離散性、不連続性、安定性をはじめとする力学系理論を再構築し、タイヒミュラーモジュラー群の作用のカオスの様相とタイヒミュラー空間の非等質性をあわせて、無限次元タイヒミュラー空間および無限型リーマン面のモジュライ空間の構造理論を新しい研究対象としてとらえなおした。

研究成果の概要（英文）：We consider the infinite dimensional Teichmuller space of a Riemann surface of general type. The asymptotic Teichmuller space is a certain quotient space of the Teichmuller space and there is a natural projection from the Teichmuller space to the asymptotic Teichmuller space. We consider the fibers of the projection over any point in the asymptotic Teichmuller space, and show a coherence of the discreteness on each fiber in the Teichmuller space. Furthermore, we formulate the concept of the Teichmuller space of a fractal structure and establish the fundamental theory on it. We introduce the Teichmuller space of a countable set of points associated with the fractal structure, and show that such a space admits a natural complex analytic structure if the fractal structure possesses standard bounded geometry.

研究分野：複素解析学

キーワード：リーマン面 擬等角写像 写像類群 モジュライ空間 力学系理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

タイヒミュラー空間は曲面に入る複素構造の変形空間であり、数学のあらゆる分野で研究されている重要な対象である。曲面の擬等角写像類群はタイヒミュラーモジュラー変換としてその上に作用し、商空間としてモジュライ空間を与える。コンパクトリーマン面に対する有限次元タイヒミュラー空間上では、タイヒミュラーモジュラー群の作用が不連続であることから、モジュライ空間は正規複素解析空間となる。一方、一般のリーマン面に対する無限次元タイヒミュラー空間においては、その作用の様相は複雑で、特に一般には不連続とは限らない。そこで、無限次元タイヒミュラー空間上に作用するタイヒミュラーモジュラー群それ自身や重要な部分群の力学系および不連続性を考察することにより、商空間として得られる新しいタイヒミュラー空間をいくつか提示してきた。これにより、特に、モジュライ空間と漸近的タイヒミュラー空間の関係も見いだしていた。

2. 研究の目的

無限型リーマン面に対するタイヒミュラー空間は無限次元になり、その上に作用するタイヒミュラーモジュラー群の軌道の様相は非常に複雑になる。特に、一般には作用が不連続ではないことから、商空間として得られるモジュライ空間には幾何構造が入らない。本研究では、モジュラー変換の分類理論の確立とタイヒミュラー空間上の安定領域の導入とその解明により、無限次元タイヒミュラー空間およびモジュライ空間の幾何学的構造を構築する。また、リーマン面の境界成分の変形空間である漸近的タイヒミュラー空間上のタイヒミュラーモジュラー群の作用を考察し、無限型リーマン面の双曲構造と対応する点のタイヒミュラーモジュラー群による軌道の様相との関係を明らかにする。具体的な目的の一つ目は、タイヒミュラーモジュラー群それ自身やその様々な重要な部分群の作用に対する離散性条件を解明することである。つまり様々な相におけるモジュライ空間の構成可能性を分析することである。二つ目は、非離散性と様々なカオス性との間の力学系的階層の幾何学的解析、およびその幾何学的対応物としての極限集合(フラクタル)を解析することである。特に、タイヒミュラー空間の点にあたる無限型リーマン面の双曲幾何学的性質が、どのようにタイヒミュラーモジュラー群の作用に反映されるかを考察する。

3. 研究の方法

本研究課題は独自のものであるが、研究および問題解決のためには、これまでに展開されているタイヒミュラー空間論の結果を習得し、本研究の議論に組み入れる必要がある。そのために、複素解析学、位相幾何学、群論などの最新の文献をそろえ、新しい技術と理論を学ぶ。研究の過程では、まず、国内の関連する研究者と討論を行い、セミナー、勉強会、国内研究集会を通して構想をまとめる。

4. 研究成果

(1) 停留的な擬等角写像類群の漸近的等角類空間上の作用

タイヒミュラーモジュラー群の力学系理論において、不連続に作用するための(リーマン面あるいはタイヒミュラーモジュラー群の部分群に対する)条件を得ることは非常に重要である。これまでの研究では、コンパクトの場合に近い状況として、リーマン面に対しては有界幾何を持つと

いう条件, また, 擬等角写像類群に対しては停留的であるという条件を考え, この条件下ではタイヒミュラー空間上の作用の様相は比較的好く分かっていました. 本研究では, リーマン面が有界幾何を持つとは限らない一般のリーマン面を考察するため, タイヒミュラー空間上の力学系理論を考察する上で重要となる漸近的タイヒミュラー空間の有用性を再度見だし, 漸近的等角類空間上(漸近的タイヒミュラー空間の各点のファイバー上)での作用に着目した. その結果, 擬等角写像類群の停留的な部分群に対して, 不連続性が一様に起こることを証明した. そして, 有界幾何を持つリーマン面に対してこれまで得られていた結果の一般化が得られた.

(2) フラクタル構造のタイヒミュラー空間

谷口雅彦氏(奈良女子大学教授)との共同研究で, リーマン面とその上の可算無限個の点集合の組みに対する擬等角変形空間を考案した. つまり, フラクタル構造と呼ばれる特定の点配置構造を導入することにより, 一般のリーマン面上の複素力学系から生じるフラクタル構造に対し, フラクタル構造の変形空間として新しいタイヒミュラー空間の概念を導入した. これは, 例えば, 正則写像の反復合成から導かれる正則力学系において重要な役割を果たしている周期点全体からなる可算集合などに応用される. メビウス半群の反復合成力学系に付随するフラクタル構造のタイヒミュラー空間に対しては, 谷口氏によりすでに幾何学的大域座標が導入されていたが, 本研究では, クライン群の極限集合に付随するフラクタル構造のタイヒミュラー空間に対しても幾何学的大域座標を導入することができることがわかった. 特に, 上記の大域座標により得られる表現空間が複素構造を持つための条件として標準的な幾何学的有界性で十分であることが解明できた. 実際, 点集合の外部として得られる無限型リーマン面に対するタイヒミュラー空間の複素構造から自然に誘導される. 証明は, その無限型リーマン面に対する擬等角写像類群の元で, リーマン面のある種の境界を固定するもの全体からなる部分群のタイヒミュラー空間への作用の不連続性が鍵となっている. この成果は研究代表者がこれまでに構築してきた無限次元の一般タイヒミュラー空間論の適用により獲得できたが, その成果の適用範囲は今まで複素力学系分野ではほとんど研究されてこなかった無限次元のパラメータ空間を持つ複素力学系や無限次元の配置空間などを包摂するものである. これにより, 大域座標からフラクタル構造のタイヒミュラー空間の自然な表現空間を導入することができ, その安定領域の決定のみならず重要な有限次元部分多様体に対するコンパクト化を考えることができた.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ege Fujikawa and Masahiko Taniguchi	4. 巻 21
2. 論文標題 The Teichmuller space of a countable set of points on a Riemann surface	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics	6. 最初と最後の頁 64-77
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/ecgd/301	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ege Fujikawa	4. 巻 14
2. 論文標題 Coherence of limit points in the fibers over the asymptotic Teichmuller space	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Computational Methods and Function Theory	6. 最初と最後の頁 357--370
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ege Fujikawa	4. 巻 31
2. 論文標題 Topological characterization of the asymptotically trivial mapping class group	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Handbook of Group Actions, Advanced Lectures in Mathematics series	6. 最初と最後の頁 309--332
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Ege Fujikawa
2. 発表標題 Coherence of limit points in the fibers over the asymptotic Teichmuller space
3. 学会等名 The 21st International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications
4. 発表年 2013年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----