様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００１２９

研究課題名（和文）準Banach関数空間の構造とマルチンゲール理論

研究課題名（英文）Structures of quasi-Banach function spaces and the theory of martingales

研究代表者
菊池　万里（Kikuchi, Masato）

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授

研究者番号：２０２０４８３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：Banach関数空間Ｘの弱空間ｗ-Ｘに於いて，種々のマルチンゲール不等式が成立するようなＸの特徴付けを与える研究を実施した．Banach関数空間とは，よく知られているＬp-空間を一般化した関数空間であり，また，Banach関数空間Ｘの弱空間とは，Ｘに付随する準Banach空間であって，弱Ｌp-空間を一般化した関数空間である．本研究の結果，弱空間ｗ-Ｘに於いてBurkholder型やDoob型のマルチンゲール不等式が成立するようなBanach関数空間Ｘの特徴付けを与え，マルチンゲール理論とBanach関数空間の構造の間には密接な関連があることを示すことができた．

研究成果の概要（英文）：We investigated some characterizations of a Banach function space X such that various martingale inequalities remain valid in the weak space w-X. A Banach function space is a function space which is a generalization of the well-known Lp-space, and the weak space of a Banach function space X is a quasi-Banach space associated with X, which is a generalization of the weak-Lp-space. As a result of our investigations, we could give characterizations of Banach function space X such that martingale inequalities such as of Burkholder-type and of Doob-type, and so on remain valid in w-X, and we could show that there is close connection between martingale theory and the structures of (quasi-)Banach function spaces.

研究分野： マルチンゲール理論，及び，関数空間論

キーワード： マルチンゲール　マルチンゲール不等式　Banach関数空間　準Banach関数空間　弱空間

１．研究開始当初の背景

1988 年の B.Johnson と G.Schetchman による共同研究，1990 年の A.Antipa による研究，及び 1991 年の I.Novikov による研究によって，Burkholder-Davis-Gundy 型のマルチンゲール不等式が成立する再配列不変性を持った Banach 関数空間Ｘの特徴付けが与えられた．そのような空間Ｘは，その Boyd 指標を用いて表現される．研究代表者（菊池）は，彼らの研究結果を発展させ，再配列不変性を仮定しない一般の Banach 関数空間Ｘに於けるマルチンゲール不等式を研究し，様々な不等式が成立するＸの特徴付けを得た．多くのマルチンゲール不等式について，それらが成立する空間Ｘは，Ｘの再配列不変性の条件，及び，Ｘの Boyd 指標を用いて表現できることが明らかとなった．

一方，研究代表者（菊池）は上記の研究を進める上で，一般の Banach 関数空間Ｘに対してその弱空間ｗ-Ｘを導入し，Ｘの構造，及び，ｗ-Ｘの構造とマルチンゲール理論の関連性を解明する研究を試みた．ｗ-Ｘに於いて様々なマルチンゲール不等式が成立する Banach 関数空間Ｘの特徴付けを与える研究などがその代表例である．ここに Banach 関数空間Ｘの弱空間ｗ-Ｘは，補間空間論などを展開する際に，自然かつ頻繁に現れる「弱 $L_p$-空間」（$L_{p,\infty}$とも記され，Lorentz 空間としてよく知られた空間）を一般化した準 Banach 空間である．そのような研究の結果，幾つかのマルチンゲール不等式と Banach 関数空間Ｘについて，それらの不等式がＸに於いて成立するＸの特徴付けと，それらの不等式がｗ-Ｘに於いて成立するＸの特徴付けとでは，様相の異なる部分があることが明らかになった．この事実に鑑み，本研究では Banach 関数空間Ｘの構造，及び，その弱空間ｗ-Ｘの構造とマルチンゲール理論の関連性をより詳細に調べることとした．

２．研究の目的

本研究課題の目的は，非原子確率空間（Ω，Σ，Ｐ）上の確率変数から成る Banach 関数空間（若しくは準 Banach 関数空間）の構造とマルチンゲール理論との関連性を解明することである．研究が進むに従い，当初の目的とは異なる方向に進むこととなったものの，当初の研究目的は次の(1)-(4)の通りである．

(1) 離散時径数のマルチンゲール $f=(f_n)$に対する Burkholder 型の弱不等式
$$\|Sf\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_X \qquad (☆)$$
が成立する Banach 関数空間Ｘの特徴付けを与える．ここに Sf はｆの２次変分を表し，$f_\infty$はｆの概収束極限を表す．また C はｆに依存しない定数を表す．

(2) 準 Banach 関数空間Ｘに於いて，すべての準ノルム有界なマルチンゲールが，その準ノルムに関して収束する為の必要十分条件を求める．

(3) 上記の(1)に於いて，Banach 関数空間Ｘを準 Banach 関数空間Ｘに置き換えて考察する．すなわち，Burkholder 型の弱不等式が成り立つ準 Banach 関数空間Ｘの特徴付けを与える．

(4) 離散時径数のマルチンゲール $f=(f_n)$に対する Burkholder-Davis-Gundy 型の不等式
$$C^{-1}\|Mf\|_X\leqq\|Sf\|_X\leqq C\|Mf\|_X$$
が成立する準 Banach 関数空間Ｘの特徴付けを与える．ここに Mf はｆの極大関数を表す．

尚，マルチンゲール $f=(f_n)$の２次変分 Sf と極大関数 Mf の定義については，下記「研究成果」の欄を参照されたい．

３．研究の方法

上記「研究の目的」の欄の(1)の研究に関して，求める Banach 関数空間Ｘの特徴付けは，Ｘの上基本関数，及び，下基本関数の性質を用いて記述できることが予想された．ここにＸの上・下基本関数とは，Ωの部分集合Ｂの確率 P(Ｂ)とＢの指示関数のＸに於けるノルム$\|\mathbf{1}_B\|_X$の増大度の関連を表す２つの関数であり，研究代表者（菊池）によって導入されたものである（上基本関数の定義については，下記「研究成果」の欄を参照されたい）．一般に，マルチンゲール不等式が成立する空間の特徴付けの研究に於いては，多くの場合，その不等式が成立する為の必要条件を求めることが難しい．(1)の研究もその例外ではない．この困難を克服して上記の予想が正しいことを示す為には，Burkholder 型の弱不等式が成立するという仮定の下に，区間(0,1]上の可積分関数全体から成る空間上で定義された平均化作用素，及び，その形式的随伴作用素が，Ｘの上基本関数によって生成される Marcinkiewicz 空間上の有界作用素になることを示すことが必要になる．これを実現すべく，様々な工夫をしながら計算し，研究集会やセミナーなどに出席した際には，関連する分野の研究者と討論や情報交換をしながら研究を進めたが，残念ながら本研究の期間内に Burkholder 型の弱不等式が成立する為の必要条件を見出すことはできなかった．その為，(1)の研究の目標を変更し，(☆)の右辺の$\|f_\infty\|_X$を$\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$に置き換えた上で，更に$\|Sf\|_{w\text{-}X}$を反対側からも評価する不等式
$$C^{-1}\|f_\infty\|_{w\text{-}X}\leqq\|Sf\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$$
が成立するような Banach 関数空間Ｘの特徴付けを求めることを新たな目標とした（変更後の不等式を Burkholder 型の２次変分不等式と呼ぶ）．下記の「研究成果」の欄に述べたように，この変更が功を奏し，変更後の不等式が成立する Banach 関数空間Ｘの特徴付けを得ることができた．用いた手法は，前述の如く，平均化作用素，及び，その形式的随伴作用素がＸの上基本関数によって生成される Marcinkiewicz 空間上の有界作用素になることを示す方法である．

「研究の目的」の欄の(2)の研究に関して，Ω上の準 Banach 関数空間Xに於いて，準ノルム有界な任意のマルチンゲールがXの準ノルムに関して収束する為には，Xが絶対連続な準ノルムを持つことが必要であろうと予想された．このことを確かめるべく，過去の研究成果や様々な具体例を考察することで研究を進めた．

「研究の目的」の欄の(3)の研究は，(1)の研究を一般化したものであるが，(1)の研究に関連した問題で，(3)の研究に優先して考察すべきものが多く存在すること，及び，(3)の研究を進める上で，有効な手法が見つかっていないことから，(1)に関連する研究を優先することとした．

「研究の目的」の欄の(4)の研究は，当初からかなり難しいものになることが予想された．しかしながら，Xを弱空間w-Xに置き換えた Burkholder-Davis-Gundy 型の不等式

$$C^{-1}\|Mf\|_{w\text{-}X}\leqq\|Sf\|_{w\text{-}X}\leqq C\|Mf\|_{w\text{-}X}$$

が成立するような Banach 関数空間Xの特徴付けであれば，(1)の研究と同様の手法で求めることができるのではないかと考え，研究目標を変更して，このようなXの特徴付けを求める研究に切り替えた．この研究に於いて用いた手法も，上記の不等式が成立するという仮定の下に，平均化作用素，及び，その形式的随伴作用素が，Xの上基本関数によって生成される Marcinkiewicz 空間上の有界作用素になることを示す方法である．

## ４．研究成果

研究が進むにつれ，「研究の目的」の欄の(2)の研究に関しては，興味深い結果に繋がらない可能性が高いことが分かってきた為，(1)，(3)，及び，(4)の研究を優先して実施することとした．また，(3)の研究は(1)の研究をより広い範囲で考察するものであるから，(1)の研究を重視し，Burkholder 型の不等式を他の不等式に置き換えた場合も含めて研究を進めることとした．以下に具体的な研究成果を記す．

Burkholder 型の弱不等式

$$\|Sf\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_X$$

が Banach 関数空間Xに於いて成立する為の十分条件を得ることはできたが，残念ながら必要条件を得ることができなかった．その為，研究の目標を変更して Burkholder 型の２次変分不等式

$$C^{-1}\|f_\infty\|_{w\text{-}X}\leqq\|Sf\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$$

が成立する Banach 関数空間Xの特徴付けの研究を進めた．ここにマルチンゲール $f=(f_n)$ の２次変分 Sf は

$$Sf=\{\Sigma_n(f_n-f_{n-1})^2+f_0^2\}^{1/2}$$

のように定義される．尚，$\Sigma_n$ は $n\geqq1$ なる整数 n に亘る和を表す．研究の目標を変更したことが功を奏し，Burkholder 型の２次変分不等式が成立するような Banach 関数空間Xの特徴付けを得ることができた．そのような空間Xは，Yをその提携空間とするとき，次の２条件を満たす空間として特徴付けられる：

・ある正定数 K が存在して

$$\phi_X(t)\phi_Y(t)\leqq Kt\quad(0<t\leqq1).$$

・ある１より大きい定数 A が存在して

$$1<\liminf\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}$$

かつ

$$\limsup\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}<A.$$

ここに liminf は t→0+とするときの下極限を表し，limsup は t→0+とするときの上極限を表す．また，$\phi_X(t)$は

$$\phi_X(t)=\sup\{\|\mathbf{1}_A\|_X:\ P(A)=t\}$$

のように定義される区間[0,1]上の関数で，Xの上基本関数と呼ばれる．勿論，$\phi_Y(t)$も同様に定義される．この研究成果は，（弱空間w-Xに於ける）マルチンゲール不等式の成立が，上基本関数 $\phi_X$を用いて表現されるXの構造を規定していることを意味する．

Burkholder 型の不等式と共に，Doob 型の不等式はマルチンゲール理論に於いて，極めて重要な役割を演ずる．弱空間w-Xに於ける Doob 型の不等式は，

$$\|Mf\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$$

のように記述される．ここに Mf は

$$Mf=\sup|f_n|$$

のように定義される $f=(f_n)$の極大関数を表す．尚，sup はすべての整数 $n\geqq1$ に関する上限を表す．この不等式が成立する Banach 関数空間Xの特徴付けを得ることができた．そのような空間Xは，次の２条件を満たす空間として特徴付けられる：

・ある正定数 K が存在して

$$\phi_X(t)\phi_Y(t)\leqq Kt\quad(0<t\leqq1).$$

・ある１より大きい定数 A が存在して

$$\limsup\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}<A.$$

前述の如く，ここに（そしてこの成果報告書を通して）YはXの提携空間を表す．上記の第２の条件が Burkholder 型の２次変分不等式の場合より弱い条件になっていることは，注目に値する．

これらの研究成果は，論文として既に学術誌に掲載されている（「主な発表論文」の欄に記した②の論文）．

上記の研究を進める過程に於いて，別のマルチンゲール不等式が弱空間w-Xに於いて成立する Banach 関数空間Xの特徴付けも得ることができた．一様可積分なマルチンゲール $f=(f_n)$に対し，その平均振動 θf は

$$\theta f=\sup E[|f_\infty-f_{n-1}||F_n]$$

のように定義される．尚，sup はすべての整数 $n\geqq1$ に関する上限を表し，$F=(F_n)$は $f=(f_n)$がマルチンゲールになるフィルトレーション（完全加法族の増大列）を表す．これまでに，平均振動 θf に関する種々の準ノルム不等式が研究されているが，それらとの関連で，本研究では不等式

$$C^{-1}\|f_\infty\|_{w\text{-}X}\leqq\|\theta f\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$$

を考察した．その結果，このような不等式が成立する Banach 関数空間Xの特徴付けを得

ることができた．そのような関数空間Ｘは，Burkholder 型の２次変分不等式の場合と同様に，次の２条件を満たす空間として特徴付けられる：

・ある正定数 K が存在して

$$\phi_X(t)\phi_Y(t)\leqq Kt \quad (0<t\leqq 1).$$

・ある１より大きい定数 A が存在して

$$1<\liminf\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}$$

かつ

$$\limsup\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}<A.$$

また，$\theta f$ に関しては，弱型不等式

$$\|\theta f\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_X$$
$$\|\theta f\|_{w\text{-}X}\leqq C\|Mf\|_X$$

が成立するような Banach 関数空間Ｘの特徴付けも得ることができた．上記の２つの不等式が成立する空間 X は，次の条件を満たす空間として特徴付けられる：

・ある正定数 K が存在して

$$\phi_X(t)\phi_Y(t)\leqq Kt \quad (0<t\leqq 1).$$

Burkholder 型の２次変分不等式などの場合と異なり，$\phi_X(At)/\phi_X(t)$の上極限や下極限に関する条件は必要ない．

更に，$\theta f$ に関する（弱型ではない）不等式

$$\|\theta f\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$$
$$\|\theta f\|_{w\text{-}X}\leqq C\|Mf\|_{w\text{-}X}$$

に関しても，これらの不等式が成立するような Banach 関数空間の特徴付けを得ることができた．そのような空間 X は，次の２条件を満たす空間として特徴付けられる：

・ある正定数 K が存在して

$$\phi_X(t)\phi_Y(t)\leqq Kt \quad (0<t\leqq 1).$$

・ある１より大きい定数 A が存在して

$$\limsup\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}<A.$$

以上，マルチンゲール $f=(f_n)$に関する準ノルム不等式に関する研究成果は，論文として既に学術誌に掲載されている（「主な発表論文」の欄に記した①の論文）．

マルチンゲールの平均振動に関する準ノルム不等式の研究に加え，マルチンゲール変換に関する準ノルム不等式の研究も実施し，平均振動の準ノルム不等式に関する成果とほぼ同様の研究成果を得ることができた．一様可積分なマルチンゲール $f=(f_n)$と$|v_n|\leqq 1$ $(n\in N\cup\{0\})$であるような可予測過程 $v=(v_n)$に対して，f の v によるマルチンゲール変換 $v*f=((v*f)_n)$は

$$(v*f)_n=\Sigma_n v_n(f_n-f_{n-1})+v_0f_0$$

のように定義される．$v*f$ に関する不等式

$$C^{-1}\|f_\infty\|_{w\text{-}X}\leqq\|(v*f)_\infty\|_{w\text{-}X}\leqq C\|f_\infty\|_{w\text{-}X}$$

が成立するような Banach 関数空間Ｘの特徴付けを得ることができた．そのような空間Ｘは,次の２条件を満たす空間として特徴付けられる：

・ある正定数 K が存在して

$$\phi_X(t)\phi_Y(t)\leqq Kt \quad (0<t\leqq 1).$$

・ある１より大きい定数 A が存在して

$$1<\liminf\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}$$

かつ

$$\limsup\{\phi_X(At)/\phi_X(t)\}<A.$$

この研究成果に加え，関連する問題についても興味深い結果を得ることができたが，かなり煩雑な内容を含む問題であるので省略する．これらの研究成果は，論文として発表する為，現在，原稿を作成中である．

以上のように，本研究の成果の殆どは「研究の目的」の(1)に関連するものであるが，(4)の研究に関連する成果も得られている．尚，以下の研究成果に関しては，未発表であり，今後，論文に纏めて発表する予定にしている．Banach 関数空間Ｘと実数 $p\in[1,\infty)$に対して，$\|x\|_{X(p)}=\||x|^p\|_X^{1/p}$ が有限であるような確率変数 x の全体をＸ(p)とするとき，Ｘ(p)は Banach 関数空間になる．弱空間 w-Ｘ(p)に於ける Burkholder-Davis-Gundy 型の不等式

$$C^{-1}\|Mf\|_{w\text{-}X(p)}\leqq\|Sf\|_{w\text{-}X(p)}\leqq C\|Mf\|_{w\text{-}X(p)}$$

が成立するような Banach 関数空間Ｘの特徴付けを考察し，完全な特徴付けではないものの，部分的な結論得ることができた．この研究については，今後も継続して研究をすすめ，完全な特徴付けを求めたい．

本研究の結果得られた成果は，研究代表者によって新たに導入された Banach 関数空間Ｘの弱空間w－Ｘに関する結果であり，この分野の研究に新たな視点を与えることができたものと判断される．

## ５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）


① Masato Kikuchi, On some martingale inequalities for mean oscillations in weak spaces, Ricerche di Matematica, Vol 64, no. 1, 2015, pp.137－165. DOI: 10.1007/s11587-015-0224-1

② Masato Kikuchi, On Doob's inequality and Burkholder's inequality in weak spaces, Collectanea Mathematica, Vol 67, no. 3, pp. 461－483. DOI: 10.1007/s13348-015-0153-z


〔学会発表〕（計７件）


① 菊池万里，弱空間に於けるマルチンゲールの平均振動不等式，富山解析セミナー2013, 2013 年 10 月 5 日，富山大学理学部（富山県富山市）．

② 菊池万里，弱空間に於ける条件付平均作用素の一様有界性とその応用，調和解析駒場セミナー，2014 年 2 月 15 日，東京大学大学院数理科学研究科（東京都目黒区）．

③ 菊池万里，On Doob's maximal inequality and Burkholder's square function inequality in weak spaces，富山解析セミナー2014，2014 年 10 月 11 日，富山大学

理学部（富山県富山市).
④ 菊池万里，弱空間に於けるマルチンゲール不等式，第 54 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム，2015 年 9 月 3 日，神奈川大学横浜キャンパス（神奈川県横浜市).
⑤ 菊池万里，On square function inequalities of weak type for martingales, 富山解析セミナー2015，2015 年 10 月 10 日，富山大学理学部（富山県富山市）
⑥ 菊池万里，弱空間に於けるマルチンゲール変換の不等式, 富山解析セミナー2016, 2016 年 10 月 15 日，富山大学理学部（富山県富山市).
⑦ 菊池万里，On inequalities for martingale transforms in a weak space，関数空間の構造とその周辺, 2017 年 2 月 6 日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市).

６．研究組織
(1)研究代表者
菊池　万里（KIKUCHI, Masato）
富山大学・大学院理工学研究部（理学）・教授
研究者番号：２０２０４８３６

(2)研究分担者
なし