

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 11 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400135

研究課題名(和文) 確率フーリエ係数の研究

研究課題名(英文) Studies on stochastic Fourier coefficients

研究代表者

植村 英明 (Uemura, Hideaki)

愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：30203483

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：確率フーリエ係数の系から元のランダムな被積分関数を復元する問題に取り組んだ。確率フーリエ係数はその構成に用いる正規直交系および確率積分の種類によってタイプが分かれる。三角関数系とスカラッド積分を用いて確率フーリエ係数を構成した場合に、被積分関数についての幾許かの仮定のもと、ブラウン運動の助けを借りることにより復元が可能であること、およびその手法について解決を見た。また、三角関数系もしくはハール関数系と小川積分を用いて確率フーリエ係数を構成した場合には、被積分関数についての幾許かの仮定のもと、確率フーリエ係数系のみから復元が可能であること、およびその手法について解決を見た。

研究成果の概要(英文)：We studied the identification problem of a random function from the system of its stochastic Fourier coefficients (SFC in abbr.). We note that SFCs are determined in accordance with the choice of orthonormal basis and stochastic integrals employed to construct SFCs. If we employ the system of trigonometric functions and Skorokhod integral to construct SFCs, then we obtained an affirmative answer to the identification problem and found a concrete procedure to reconstruct a random function from its SFCs with the aid of Brownian motion under some conditions on a random function. If we employ the system of trigonometric functions or Haar functions and Ogawa integral to construct SFCs, then we also obtained an affirmative answer to the identification problem and found a concrete procedure to reconstruct a random function only from its SFCs without the aid of Brownian motion under some conditions on a random function.

研究分野：確率解析

キーワード：確率フーリエ係数 非因果的関数 Ogawa積分 Skorokhod積分 Malliavin解析 確率フーリエ変換 Haar関数系

1. 研究開始当初の背景

(1) 関数に直交関数系をなす各関数(例えば三角関数)を掛けて積分したものをフーリエ係数と呼ぶわけだが、ここに現れる積分を確率積分に置き換えたものを確率フーリエ係数と呼ぶ。特に被積分関数としてランダムなものまで認めることとしよう。この確率フーリエ係数なるものは小川重義[1]によりフレドホルム型確率積分方程式の解法に於いて初めて導入された。しかしながらこの解法は方程式の特性を利用したものとなっている。ここで自然に次の疑問が生じる。すなわち「確率フーリエ係数から被積分関数を復元することはできないだろうか」。ここで確率フーリエ係数は、使用する直交関数系および確率積分の選び方によって決定されることに注意しておく。

(2) ランダムな被積分関数が因果的、すなわちブラウン運動に適合した関数とする。この場合確率フーリエ係数を定義するのに最も自然な確率積分として伊藤積分が考えられる。また直交関数系として三角関数系を選ぶ。被積分関数に自乗可積分性などのいくつかの仮定をおくと、ウィナー-伊藤分解を仲立ちとしてこの復元問題が解決されることを小川重義[2]が示している。

(3) 被積分関数が非因果的、すなわちブラウン運動の適合性を仮定しない一般のランダム関数の場合を考える。ウィナー-伊藤分解を仲立ちに考えると、この場合には伊藤積分の拡張としてスカラハッド積分が利用できる。そこで本研究代表者は小川重義とともに、被積分関数に対するいくつかの仮定のもと、三角関数系による確率フーリエ係数からの復元問題を解決し、併せてこの状況下における一般の直交関数系からなる確率フーリエ係数からの復元にも成功している。([3])

2. 研究の目的

非因果的関数の確率フーリエ係数からの復元問題に取り組む。これまでの研究では、確率フーリエ係数はスカラハッド積分を通じて定義されている。そして復元すべき被積分関数を多重ウィナー積分の和であるウィナー-伊藤分解で表された際のそれぞれの核関数を求めるというコンセプトでなされている。しかしながら非因果的関数の積分には様々なものがある。ここではスカラハッド積分の他に小川積分などにも注目する。それぞれの場合の復元問題に、核関数の復元という視点に囚われることなく取り組む。

3. 研究の方法

研究分担者との情報交換を密に行い、文献渉猟などを通じてこの課題に関連を持ちそうな研究についての知見を充実させる。特に数理ファイナンスで扱われたボア畳み込みによるポラティリティの推測理論に注目す

る。

4. 研究成果

(1) 自乗可積分性及び幾ばくかの正則性を持つ非因果的関数に対して、その確率フーリエ係数の構成に用いる確率積分としてスカラハッド積分を採用した。さらに時間積分項を付加した非因果的過程に被積分関数を拡張し、また、直交関数系として三角関数系を採用した。この設定の下で、マリアヴァン-タルマイヤー[4]により数理ファイナンスにおいて応用されたボア畳み込み法を参考に、ブラウン運動を陽に使用した上で復元問題を解決した。すなわち三角関数の確率積分からなる系(離散ホワイトノイズ)を用いし、これと確率フーリエ係数とのボア畳み込みから非因果的過程が復元されることを示した。また、可積分性の劣る被積分関数に対しては、その確率フーリエ係数の構成に於いてスカラハッド積分の代わりにマリアヴァンダイヴァージェンスと呼ばれる確率積分を採用することにより同じ手法による復元問題の解決を見た。これらの場合には全ての確率フーリエ係数が復元に必要なのではなく、任意可算個の確率フーリエ係数で十分であることが示された。ここに通常の場合のフーリエ係数の性質との大きな差異が認められる。

(2) 次にブラウン運動を陽に用いない復元、特に確率フーリエ係数のみがデータとして与えられている場合の復元可能性およびその方法について考察した。確率フーリエ係数に用いる確率積分は小川積分を採用した。また、直交関数系として三角関数系を採用した。この設定の下で、まずそれぞれの確率フーリエ係数に適切な重みを付けた数列(確率変数列)に対するフーリエ級数を考える。これは小川重義により確率フーリエ変換と名付けられている。被積分関数にいくつかの正則性と非負性を仮定すると、この確率フーリエ変換の存在、具体的表現と微分可能性が得られ、これを微分した関数の差分とブラウン運動の重複対数の法則に現れる関数との比の上極限が、ブラウン運動の重複対数の法則に訴えることで、確率1で被積分関数を与えることを示した。特筆すべきは、任意有限個の確率フーリエ係数はこの復元に寄与しないことである。これは通常の場合のフーリエ係数の場合と状況を異にする現象で、確率フーリエ係数の特殊性を際立たせる結果だと思われる。

(3) しかしながら(2)の議論では確率フーリエ変換の構成に於いて、重み付きフーリエ級数の収束性を保証するため、付加する重みを適切に選ぶとともに、被積分関数に対する更なる仮定を置く必要を余儀なくされている。そこでハール関数系を確率フーリエ係数を定義する際の直交関数系として採用した。この場合には、以前に課したより緩い非負被積分関数の正則性の仮定のもとで、この確率フ

ーリエ係数のハール関数系に関する(有限)フーリエ和からの被積分関数の復元が可能となることを示した。なお,この場合に於いてもやはり任意有限個の確率フーリエ係数はこの復元に寄与しないことが示された。

いずれの場合にも確率フーリエ係数の部分系からの復元可能性という通常のフーリエ係数とは大きく異なる状況が生じていることが確認された。これは研究開始時には予想していなかった非常に興味深い現象である。確率フーリエ係数へのブラウン運動の寄与が原因だと思われる。この辺りのからくりの解明が一つの課題である。

引用文献

[1] Ogawa,S. : On the stochastic integral equation of Fredholm type, in Patterns and Waves (monograph), Stud. Math. Appl. Kinokuniya 18, 1986, 597-605.

[2] Ogawa,S. : On a stochastic Fourier transformation, Stochastics, 85-2, 2013, 286-294

[3] Ogawa,S. & Uemura,H. : On a stochastic Fourier coefficient : case of noncausal functions, J. Theoret. Probab. 27-2, 2014, 370-382

[4] Malliavin,P. & Thalmaier,A. : Stochastic calculus of variations in mathematical finance, Springer Finance, Springer Berlin Heidelberg NewYork (2005)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

- (1) Shigeyoshi Ogawa & Hideaki Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs, RIMS Kokyuroku, 1952, 2015,128-134, (査読なし)
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1952-20.pdf>
- (2) Shigeyoshi Ogawa, A direct inversion formula for SFT, Sankhya A, 77-1, 2015, 30-45, (査読あり).
DOI: 10.1007/s13171-014-0056-1
- (3) Shigeyoshi Ogawa & Hideaki Uemura, Identification of noncausal Ito processes from the stochastic Fourier coefficients, Bull. Sci. Math., 138-1,

2014, 147--163, (査読あり).

DOI:10.1016/j.bulsci.2013.12.003

〔学会発表〕(計 21 件)

- (1) 小川重義, Une formule directe d'inversion de la TFS, Une Conference au Seminaire de Probabilite et Finance, Univ Paris a marne-la-valle, 2015年11月26日, Univ Paris a marne-la-valle(France)
- (2) 植村英明, On the derivation of noncausal function from its Haar-SFCs, シンポジウム「確率解析とその周辺」, 2015年10月20日, 大阪大学(大阪府豊中市)
- (3) 植村英明, Haar系SFCによる非因果的関数の同定, 日本数学会秋期分科会, 2015年9月14日, 京都産業大学(京都府京都市)
- (4) 小川重義, On the inversion of stochastic Fourier transformation, Probability Seminar at Academia Sinica, Taipei, 2015年6月8日, Academia Sinica, Taipei(Taiwan)
- (5) 小川重義, Direct Inversion Formulas for Natural SFT, Probability Seminar at Firenze Univ. Fac d'Economie, 2015年5月11日, Firenze Univ. Fac d'Economie(Italy)
- (6) 植村英明, On the identification of noncausal functions from the SFCs, 日本数学会年会, 2015年3月21日, 明治大学(東京都千代田区)
- (7) 植村英明, On the identification of noncausal functions from the SFCs, 確率論シンポジウム, 2014年12月18日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
- (8) 小川重義, TFS et le probleme de l'inversion, Seminaire Probabilite et Statistique, 2014年12月15日, ENSTA(国立高等技術教員学校)(France)
- (9) 植村英明, Identification of noncausal functions from the stochastic Fourier coefficients without the aid of a Brownian motion, シンポジウム「確率解析とその周辺」, 2014年10月16日, 東北大学(宮城県仙台市)
- (10) 小川重義, On a direct inversion formula for natural SFT, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学(広島県東広島市)
- (11) 小川重義, On a direct inversion formula for SFT, ISI Seminar on Probability and Statistics, 2014年2月13日, Division of Math., ISI Bangalore(India)
- (12) 植村英明, Identification of a noncausal Ito process from the stochastic Fourier coefficients, 日

本数学会秋期分科会, 2013年9月24日,
愛媛大学(愛媛県松山市)

- (13) 植村英明, Identification of a noncausal Ito process from the stochastic Fourier coefficients, シンポジウム「確率解析とその周辺」, 2013年9月22日, 京都大学(京都府京都市)
- (14) 小川重義, SFT on Wiener space and its applications to finance, Carlo Methods and Applications, 2013年7月15日, Univ. de Savoie, Annecy (France)
- (15) 小川重義, Noncausal calculus and stochastic Fourier transformation, Probability and Analysis, 2013年6月3日, Dept. of Math., National Taiwan Univ.(Taiwan)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

植村 英明 (UEMURA, Hideaki)
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号: 30203483

(2) 研究分担者

小川 重義 (OGAWA, Shigeyoshi)
立命館大学・理工学部・非常勤講師
研究者番号: 80101137

(3) 連携研究者

()

研究者番号: