様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月　 １ 日現在

機関番号：１４６０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１３８

研究課題名（和文）様々な函数空間における一般化されたフーリエ展開とウェーブレット展開の比較

研究課題名（英文）Comparison of generalized Fourier and wavelet expansions in function spaces

研究代表者
森藤　紳哉（MORITOH, Shinya）

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：３０２７３８３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：函数の「滑らかさ」とフーリエ係数の「大きさ」の相関関係の研究であった．ワイル・ストーン・ティッチマーシュ・小平の一般的な展開定理を用いた研究である．（１）附随する密度函数についての条件の一般化，（２）対応する固有値分布の問題，（３）ウェーブレット的発想を取り入れること，これら3点に大別される．重み付きベゾフ空間に於ける不等式の問題に還元することがポイントの一つである．本研究は，オーソドックスな問題意識に由来するものであり，古典的な計算手法を縦横無尽に扱い得るかがポイントとなる．そのような意味での知識の集積が今後への糧となり得る．

研究成果の概要（英文）：The main idea of this research is the intimate relation between the smoothness of a function and the decay of its Fourier transform. We use the Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira theorem on general expansions. The main subjects are as follows; (1) to give a generalization of the condition on associated density functions, (2) to consider the distribution of eigenvalues for the operators under consideration, and (3) to reconsider the problem in light of wavelet theory. One of the techniques is to give a weighted inequality in Besov spaces. This research comes from classical analysis, and an ability to use a classical method is essential. Such a collection of knowledge will become important in our future research.

研究分野： フーリエ解析

キーワード： フーリエ解析　ワイル・ストーン・ティッチマーシュ・小平の定理　函数空間　重み付き不等式　ウェーブレット解析

１．研究開始当初の背景

函数の「滑らかさ」とフーリエ係数の「大きさ」の相関関係についての研究は，長い歴史を持つ．研究開始当初に研究代表者が意識していた定理は，フーリエ級数の絶対収束性に関するベルンステインの定理（1914 年．ヘルダー・ジグムント空間が用いられる），及びサースの定理（1946 年．ベルンステインの定理に現われるヘルダー・ジグムント空間の滑らかさがクリティカルな場合の定理であり，実質的にベゾフ空間が用いられる）の 2 つである．更に関連し得る背景として，ハーディ・リトルウッド以降の研究，特にアスキー，ボアスやヴァインガー，ラインドラー，泉夫妻，シュテチキン，ウリァーノフたちの研究が挙げられる．すなわち，フーリエ係数に「単調性・非負性」や「間隙性」等を要請した研究である．しかし乍ら，このような華々しい仕事がいつしか影を潜めたように見える．（近年，ラインドラーが若かりし日の仕事に回帰しているが．）

一方，ワイルに始まる固有値問題の研究も長い歴史を持つ．ヘルマンダーによるフーリエ積分作用素の理論もここから生まれた．そして，1970 年代のデュイステルマート・ギィレミンの仕事に一つの頂点を見ることが出来る．

上記のことから，研究開始当初の背景を総括すると，ワイル・ストーン・ティッチマーシュ・小平による一般化された函数展開を用いた大きな解析的枠組を設定しておけば，古典的なフーリエ解析と固有値問題の融合を見ることが出来るというものであった．

２．研究の目的

函数の「滑らかさ」とフーリエ係数の「大きさ」の相関関係についての研究は，長い歴史を持つ．この方面での，ワイル・ストーン・ティッチマーシュ・小平の定理を用いた研究の目的は，上記背景をもとに以下の 3 点に要約される（ワイル・ストーン・ティッチマーシュ・小平の定理とは，常微分作用素に対する固有函数を用いた函数展開のことであった．一般化されたフーリエ級数展開と呼んでも良い．これは，フーリエ級数・フーリエ積分・エルミート展開・ベッセル展開・ラゲール展開などを含む一般的な函数展開である）：

（1）付随する密度函数についての条件の一般化；

（2）対応する固有値分布の問題；

（3）ウェーブレット的発想を取り入れること．

本研究の初期に於いては先ず，シュマイサー・トリーベル流に定義されるベゾフ空間が考えられた．函数展開に用いられる密度行列が，自然な形でベゾフ空間の定義に用いられたのである．そして当初は，2 進区間上の密度函数（これは有界変動である）の全変動に対して，ある種の「一様性」が仮定されていた．その下で，一般化されたフーリエ係数の重み（多項式）付きルベーグ・ノルムを，元の函数のベゾフ・ノルムによって上から押さえることから始められたのであった．このとき，ルベーグ空間の指数，多項式の次数，「一様性」に現われるパラメータ，の 3 つの数が密接に関連し，ベゾフ空間の滑らかさを表わす指数はこれらから決定されていたのである．

目的の一つ目「付随する密度函数についての条件の一般化」は，従って「上記の一様性の条件を緩めること」から開始される．先ず初めに密度函数ありき，から出発して「一様性」を緩めることを考えるのである．始まったばかりの研究では，「一様性」の条件以外はヘルダーの不等式しか本質的には使われていなかった．

その上で，二つ目の目的「対応する固有値分布の問題」に向かう．先ずは，ティッチマーシュのテキストに見られる固有値分布の問題の取り扱いを目的とした．必然的に，WKB 法等の新たな知見も射程に入れる．また，フェファーマンの SAK 原理も射程に入る．そのような高い目標を立てた．

最後に三つ目の目的「ウェーブレット的発想を取り入れること」であるが，これは真に新しい．一般化された固有函数展開をウェーブレット的に見直すことは，特に，密度函数に「周波数」のみならず「位置（あるいは時間）」を表わす変数を自然に引き込むことになる．その定式化も容易であるが，難しいのは，これを常微分作用素に対する固有値問題に引き戻すことである．これは真に新たな問題提起を内包するものである．

３．研究の方法

本研究の最初の部分で，先ず初めに密度函数ありき，から出発するアイディアが示唆されている．初めは仮定されていた「一様性」の条件を緩めることから研究をスタートさせる．研究目的の 2 番目に現われる困難は，固有値分布の問題に関わる研究の困難そのものである．3 番目はウェーブレットの問題であるが故に，密度函数に「周波数」のみならず「位置（あるいは時間）」を表わす変数が自然に入ってくる．容易に予想される定式化とそれに伴う緒結果の定式化を行う．

いずれも「発表，意見交換，文献」が肝要であり，国内外の研究集会等を通して国内外の数学者との連絡・連携を図る方針である．特に，イェナ（ドイツ）の数学者達との 20 年に亘る交流は函数空間論そのものと言っても過言ではない．函数空間論の専門家集団との意見交換・情報収集も不可欠である．

４．研究成果

函数の「滑らかさ」とフーリエ係数の「大きさ」の相関関係の研究に関する成果である．特に，ワイル・ストーン・ティッチマーシュ・小平の一般的な展開定理を用いた研究成果である．目的の（1）～（3）に沿う形で以下に述べる．

（1）付随する密度函数についての条件の一般化，すなわち「一様性の条件の緩和」に成功した．一般化されたフーリエ係数の重み（多項式）付きルベーグ・ノルムを，元の函数のベゾフ・ノルムによって上から押さえる不等式の問題であるが，ルベーグ空間の指数も多項式の次数も，「一様性」に代わり得るパラメータに関連し，ベゾフ空間の滑らかさを表わす指数もこれらから決定されることも確認出来た．

（2）対応する固有値分布の問題は，次の（3）と共に進めた部分も多い．先ずは，ティッチマーシュのテキストに見られる固有値分布の問題の取り扱いを目的とし，そこに書かれている古典的な結果の回復には，ある程度まで成功した．ウェーブレット的に生ずる「ぶれ」も確認できた．更に必然的に，WKB 法等の新たな知見も射程に入れ，またフェファーマンの SAK 原理も射程に入れたが，現時点では，かなり高いハードルを予感させるものであった．部分的な計算は残せたが，現時点では発表迄には至っていない．

（3）ウェーブレット的発想を取り入れることは，すなわち一般化された固有函数展開をウェーブレット的に見直すことである．特に，密度函数に「周波数」のみならず「位置（あるいは時間）」を表わす変数を自然に引き込むことになったが，その定式化は容易であった．難しいのは，これを常微分作用素に対する固有値問題（2）に引き戻すことである．これは真に新たな問題提起を内包するものであった．種々の研究集会で意見交換や情報収集に当ったが，また特にイェナ（ドイツ）に於ける函数空間論セミナーでの交流も十分であったが，完全な形での論文発表には至っていない．ただ，ある程度までの結果を纏めることは出来た．

以上の他，ウェーブレットと特異性理論に関する研究論文はアクセプトされた．「函数の滑らかさとフーリエ係数の大きさの相関関係」という本研究の背骨に関わるものである．主な発表論文の①がそれである．学会発表としては，③と⑤～⑦に於ける研究集会等を通じて発信がなされた．この方面の研究は，もともと⑦の特別講演を機に生まれたものであったので，それ以降，計 4 回に亘って様々のヴァリエーションを付けつつ発表がなされたことは有意義であった．特に，⑤のブエノスアイレス（アルゼンチン）に於ける発表では（研究代表者の普段の感覚とは異なる）様々の解析学者に発信することが出来，極めて有意義であった．

論文②は古典的な不等式を扱ったものであるが，本研究課題も古典的な解析や不等式と密接に結び付いたものであったので，そのような古典の渉猟を経て生まれた本論文の結果は望外のものであった．学会発表としては，②と④に於ける日本数学会年会等を通じて発信がなされた．

なお，その意味での古典解析はイェナ（ドイツ）に於ける発表①ででもなされた．カールマンに由来する古典的不等式の重み付き版である．このような不等式の応用を考えることに関しては，イェナ（ドイツ）のトリーベル教授ですら今後を予測することは難しいとのコメントを頂戴した．

以上のような形で，研究集会や国内外の出張を通して，数学的人脈を幅広く培うことが出来たので，対外的な架け橋を構築することが出来たと言える．

数学的文献にも十分に接しながら，本研究を進めることが出来た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① <u>森藤紳哉</u>,
Detection of singularities in wavelet and ridgelet analyses,
RIMS Kôkyûroku Bessatsu,
B57 (2016), 1-13，査読有.

② <u>森藤紳哉</u>，田中由美,
Comparison of integral and discrete Ostrowski's inequalities in the plane,
Math. Inequal. Appl. 18 (2015),
125-132，査読有.

〔学会発表〕（計 7 件）

① <u>森藤紳哉</u>,
A limiting case of the Ariño-Muckenhoupt inequality,
Seminar on Function Spaces,
2015 年 12 月 18 日,
イェナ（ドイツ）

② <u>森藤紳哉</u>,
オストロフスキーの不等式と幾つかの例,
日本数学会 2015 年度年会,
2015 年 3 月 22 日,
明治大学

③ <u>森藤紳哉</u>,
Detection of singularities in wavelet and ridgelet analyses,
RIMS Symposium on “Several aspects of microlocal analysis”,

2014年10月20日,
京都大学数理解析研究所

④ 森藤紳哉,
オストロフスキーの不等式とその離散化,
日本数学会2014年度秋季総合分科会,
2014年9月27日,
広島大学

⑤ 森藤紳哉,
Some roles of function spaces in wavelet theory -- detection of singularities --,
Workshop on Infinite Dimensional Analysis Buenos Aires 2014,
2014年7月22日,
ブエノスアイレス（アルゼンチン）

⑥ 森藤紳哉,
Two-microlocal spaces and ridgelets: detection of line singularities,
代数解析学と局所凸空間,
2014年2月19日,
日本大学

⑦ 森藤紳哉,
Microlocal Besov spaces and dominating mixed smoothness,
日本数学会2013年度秋季総合分科会,
2013年9月24日,
愛媛大学

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
森藤　紳哉（MORITOH, Shinya）
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号：30273832