

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 5 月 8 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400140

研究課題名(和文) 抽象発展方程式論から抽象偏微分方程式論へ 個体数変動モデルへの応用に向けて

研究課題名(英文) From abstract evolution equations to abstract partial differential equations - for applications to population dynamics models

研究代表者

蚊戸 宣幸 (Kato, Nobuyuki)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号：40177423

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：ある領域に生息する生物の個体数変動を表すモデルを考える。ここでは、死亡率、再生産率、移入率などが各個体のサイズ、時刻、場所に依存して決まり、さらに各個体は空間的に生息域に拡散していくものとする。本研究では、このようなモデルを解析する新しい枠組みとして、抽象的な偏微分方程式の理論の構築と整備を図った。基礎理論として、解の存在と一意性、初期値に関する連続的依存性、解の正値性を示した。また、比較定理、双対問題や弱解の一意性などを研究した。

研究成果の概要(英文)：We have considered some population models living in a habitat. Here, the mortality, the reproduction, and the inflow are supposed to depend on the individual's size, time and position. In addition, each individual is supposed to spread in the habitat. In this research, as a new framework to analyze such models, we have intended to introduce and develop a theory of abstract partial differential equations. As a basic theory, we have established the existence and uniqueness of solutions, continuous dependence on initial data and positivity of solutions. Also, we have investigated comparison theorem, the dual problem and uniqueness of weak solutions.

研究分野：解析学

キーワード：抽象偏微分方程式 個体数モデル

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) 古くはHille-吉田の定理から始まる線形発展方程式の理論は、1960年の終わりから1970年代にかけて、非線形発展方程式論として発展し、時間と場所を変数に持つ数多くの偏微分方程式へ応用されてきた。実際、場所の変数の偏微分を関数空間上の作用素とみることで、関数空間上の時間変数についての常微分方程式の形である発展方程式として取り扱うことができる。そして、この抽象化により、様々な複雑な偏微分方程式に対する見通しがよくなることから発展方程式という分野が確立されていった。
- (2) サイズと時間を変数に持つサイズ構造化個体数変動モデルの研究は、1980年代半ば頃から行われてきた。これは古くから現在に至るまで数多く研究されている年齢構造化モデルを一般化するという意味もあるが、それだけでなく、応用上の必要性から研究されるようになった。実際、細胞の増殖現象のモデルや微生物、植物や魚などのモデルには年齢よりもサイズが重要なパラメータである。
- (3) 単位時間当たりのサイズの増大を成長率と呼ぶが、1990年代半ばに非線形の成長率を持つモデルの解析が始まった。2000年代に入り、研究代表者は多種生物系を含めた非線形成長率を持つサイズ依存の個体数変動モデルの研究を進めてきた。しかし、場所の変数を持つ空間拡散を考慮したサイズ構造化モデルに対する研究はほとんどなかった。Webbは、2008年の論文で年齢、サイズ、場所に依存する個体数変動モデルで、成長率はサイズにのみ依存し、年齢に関する誕生法則をもつものを作用素論の立場から取り扱い、解の挙動について研究した。

## 2. 研究の目的

サイズと時間と場所の変数をもつ個体数変動モデルに対して、従来の発展方程式のように場所の変数による偏微分を作用素として関数空間に隠して定式化すると、サイズと時間変数が残り、関数空間上の偏微分方程式の形となり、従来の発展方程式の枠組みで捉えられない。そこでまず、バナッハ空間上の作用素を持つ偏微分方程式という新しい枠組みで理論を展開することを目的とする。その上で、空間拡散を伴うサイズ構造化個体数変動モデルへ応用することを目的とする。具体的には以下のような点について考察する。

- (1) バナッハ空間上の偏微分方程式の基礎理論としての解の存在と一意性、初期値の連続依存性を考察する。
- (2) バナッハ空間上の偏微分方程式に対する定常解の存在性を考えるとともに、定常解の局所安定性に関する線形化安定性の原理を考察する。
- (3) 多種生物系を含めたサイズと場所に依存する個体数変動モデルに対して、上記の抽象理論を応用する。

## 3. 研究の方法

- (1) バナッハ空間上の偏微分方程式で線形の作用素を持つ場合を考察する。この場合は解の表現を求めて、それをを用いて解の存在と一意性、初期値に対する解の連続依存性を研究する。
- (2) バナッハ空間上の偏微分方程式で線形の作用素を持つ場合に定常解の存在やその安定性について研究を行なう。
- (3) 非線形の作用素を持つ場合について研究する。この場合は解の表現が期待できないので、近似理論を使う必要があると思われる。
- (4) 空間拡散を伴うサイズ構造化個体数変動モデルへの応用について考察する。

## 4. 研究成果

- (1) (主な成果)  
成長率がサイズと時間に依存する線形の場合についての基礎研究を行った。空間拡散を伴う個体数変動モデルを可積分関数の空間における偏微分方程式として捉えて定式化した。さらに、強連続半群の生成作用素を含むバナッハ空間上の一階偏微分方程式の形に一般化し、解の表現を求め、その解の存在と一意性及び正值性を示した。この方法は、ある種の非線形性を含む複数クラスに分類されたモデルに対しても有効である事が示された。それによりサイズ構造化感染症モデルに応用ができる事も示された。

成長率がサイズと時間に依存する線形の場合で、死亡率や出生率がサイズと時間と場所の3つに依存する場合を取り扱った。このようなモデルをバナッハ空間上の偏微分方程式へと抽象化し、そのマイ

ルド解の存在と一意性を示した上で、比較原理及び解の有界性を示した。さらにこれらの結果を用いることで、死亡率や出生率が各時刻における場所についての個体数密度に依存する非線形性を持つ場合を研究した。

最適収穫問題などへの応用も見据えた抽象理論の構築を目指した。特に成長率に相当する関数については、4つのパターンに分けて、抽象的偏微分方程式を考えた。特に順序バナッハ空間において、生成作用素が解析的半群の生成作用素なら特性曲線に沿って微分可能な解の一意存在と正值性を得た。そして元の抽象的偏微分方程式の双対問題を研究した。これについては空間がバナッハ・ラティスで、解析的半群の生成作用素を持つ場合に双対問題の一意解が存在することを示した。さらにこのことより弱解を定義し、上記の設定の下で弱解の一意性を示した。

空間拡散を伴う線形サイズ構造をもつ収穫モデルに対する最適収穫問題の最適解の存在を示した。その他、構造化モデルの理論を応用して、技術発展の元での新旧の資産への投資をモデル化した非線形積分方程式の最適制御問題について最適解の存在を示した。

- (2) (国内外に置ける位置づけとインパクト) サイズと場所に依存する個体数変動方程式の解析をするための一つの道具を与えた。空間拡散を伴うサイズ構造化された個体群モデルを抽象的なバナッハ空間における偏微分方程式という枠組みで捉えることが可能であることを示したことは、今後の理論の発展にとって重要である。特に抽象的に捉える事で空間的な広がりには拡散だけでなくある種の走化性を含める事も可能になり、応用上重要である。

これまでの研究では、各時刻に生息域全体に存在するすべてのサイズの総個体数に依存した非線形性しか扱えていなかったが、今回の研究では、場所によって変わる非線形性をもつ個体群モデルを扱えるようになった。このことは、より現実的な個体群モデルを扱う上で重要である。

空間拡散を伴うサイズ構造化個体数変動モデルを抽象化したバナッハ空間上の偏微分方程式の双対問題及び弱解の一意性の結果が得られたことは、最適

収穫問題を考える上で非常に重要である。

これまでには空間一様なサイズ構造化個体数変動モデルに対する最適収穫問題の研究はあったが、今回初めて空間拡散を伴うサイズ構造化個体数変動モデルに対する最適収穫問題の解の存在が示された。

### 3. 今後の展望

これまでの研究で、いくつかのタイプの抽象偏微分方程式を扱ってきた。そのうちの1つは、死亡率や再生産率が場所によらないタイプで、この場合は、生息域全体の総個体数に依存する非線形性を許すことまでわかった。しかし、場所ごとの個体数に依存するタイプは扱えないので、このような場合も扱うために研究してきたのが、死亡率や再生産率を作用素として定式化した線形の抽象偏微分方程式である。これに対して、解の存在、一意性、初期値についての解の連続的依存性、正值性などの結果が得られた。今後はこの結果を用いて、場所ごとの個体数に関係した非線形性のある死亡率や再生産率を持つ個体数変動モデルに対する理論を作る必要がある。

また、個体数変動モデルでは、定常解の存在や安定性が重要になるので、これまでの研究を進展させて、抽象的枠組みで定常解の存在や安定性の理論を整備したい。

また、場所に関する作用素が半線形の抽象的偏微分方程式の理論を構築する。これにより、応用上重要な例を取り込むことができる。

さらに、最適収穫問題についても抽象的枠組みでこれまでの理論を進展させる。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

N. Hritonenko, N. Kato and Yu. Yatsenko, Optimal control of investments in old and new capital under improving technology, J. Optim. Theory Appl. Vol.172 (2017), no. 1, 247-266. 査読有り

DOI:10.1007/s10957-016-1022-y

N. Kato, Abstract linear partial differential equations related to size-structured population models

with diffusion, J. Math. Anal. Appl. 436(2016), no. 2, 890-910. 査読有り  
DOI:10.1016/j.jmaa.2015.11.077

N. Kato, Linear size-structured population models with spacial diffusion and optimal harvesting problems, Math. Model. Nat. Phenom. 9 (2014), no. 4, 122-130. 査読有り  
DOI: 10.1051/mmnp/20149408

〔学会発表〕(計3件)

N. Kato, Partial differential equations in Banach lattices related to size-structured population models, Equadiff 2015, Universite Claude Bernard Lyon 1, 2015 7.7. リヨン(フランス)

N. Kato, Size-structured population models with diffusion, AIMS2014, Universidad Autonoma de Madrid, 2014. 7.7. マドリード(スペイン)

N. Kato, Abstract size-structured population dynamics in Banach spaces, Equadiff 13, Charles University, 2013. 8.27. プラハ(チェコ)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

蚊戸 宣幸 (KATO, Nobuyuki)  
金沢大学・理工研究域・教授  
研究者番号：40177423

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

齋藤 保久 (SAITO, Yasuhisa)  
島根大学・総合理工学部・准教授  
研究者番号：30402241

杉江 実郎 (SUGIE, Jitsuro)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号：40196720

瀬戸 道生 (SETO, Michio)  
防衛大学校・総合教育学群・准教授  
研究者番号：30398953

黒岩 大史 (KUROIWA, Daishi)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号：40284020