

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 23 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400141

研究課題名(和文) 不動点理論に関連する種々の非線形問題

研究課題名(英文) Nonlinear problems related to fixed point theory

研究代表者

鈴木 智成 (Suzuki, Tomonari)

九州工業大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：00303173

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：この研究期間の3年間、不動点理論に関連する種々の非線形問題に関して、いくつかの研究成果を得た。新しい非線形写像のクラス Chatterjea mapping と Condition (CC) を定義し、基本的な性質、不動点の存在定理、不動点への収束定理を証明した。 n -generalized metric space という空間が compatible な位相を持つか？ という問題に否定的な解答を与えた。また、部分的な肯定解も与えた。Banach の縮小原理の結論である「successive approximation が唯一の不動点へ収束する」という条件に対する新たな必要十分条件を与えた。

研究成果の概要(英文)：In these three years, we have several results in nonlinear problems related to fixed point theory. For example, we have introduced new classes of nonlinear mappings (Chatterjea mapping, Condition (CC)) and studied basic properties, existence of fixed points and convergence theorems. We have given examples of n -generalized metric spaces that do not have the compatible topology. Also we have proved that every 3-generalized metric space has the compatible topology. We have obtained a new sufficient and necessary condition for successive approximation.

研究分野：不動点理論

キーワード：不動点 best proximity point nonspreading mapping Chatterjea mapping n -generalized metric absolute norm p -uniform convexity q -uniform smoothness

1. 研究開始当初の背景

以下の3点に絞って述べたいと思う。

(1) 2008年に Kohsaka と Takahashi により導入された nonspreading mapping という素晴らしい概念がある。多くの研究成果が他の研究者によりなされているが、軌道の収束に関する研究成果は未だなかった。

(2) Branciari によって2000年に導入された ϕ -generalized metric space という概念は非常に面白い概念である。距離空間の概念を拡張した概念であるため、これまでの研究者は、この空間に位相が存在するものとして議論を進めていた。また、扱いの難しい概念のため、他の研究者による間違い証明が多く見られた。

(3) 距離空間における successive approximation については、1983年に Leader による素晴らしい研究成果がある。研究代表者もいくつかの結果を得ていた。

2. 研究の目的

一番大きな目的は新しい研究分野の開拓であるが、これは容易なことではない。そのため、従来の定理を改良(より弱い仮定から同じ結論を導くこと、または、同じ仮定から強い結論を導くこと)が第1の目的となる。次に、その改良された定理を用いて、新たな応用問題に適用することが第2の目的になる。

また、これらとは観点が異なるが、限界まで改良すること(および、その改良が限界であることを証明すること)も大切な目的である。限界が分かることで、その定理の数学的な背景が分かることが多いからである。

また、簡潔な別証明や反例を与えることも重要である。数学的な構造を明らかにできることが多いからである。

3. 研究の方法

研究代表者の研究方法の特徴としては、コンピュータによる数値実験をかなりしていることが挙げられる。数値実験の結果は、論文には現れることはないが、進むべき研究の方向性が見えてくることが多く、効率よく研究成果を出すことに大変役に立っている。しかしながら、基本的な研究方法は、他の数学者の研究方法と同じであり、特筆すべきことはない。

4. 研究成果

(1) nonspreading mapping に関連する研究を、論文 [3] [7] で行った。論文 [7] では、

nonspreading mapping という概念に関連する非線形写像のクラスを定義し (Chatterjea mapping と命名した)、基本的な性質、不動点の存在定理、不動点への収束定理を証明した。Chatterjea mapping は、空間が Hilbert space のときは、nonspreading mapping を拡張した概念である。Banach space のときは、それぞれ独立な概念である。本論文で証明した Chatterjea mapping に関する収束定理の1つは、nonspreading mapping に関する軌道の収束問題の1つの解答を与えた。論文 [3] では、さらに研究を進めた。基本的な写像である縮小写像は Chatterjea 写像ではないため、それを縮小写像を含むように Chatterjea 写像の概念を拡張した。Condition (CC) と名付けたが、この条件に関する不動点理論を構築した。

(2) ϕ -generalized metric space という概念に関する研究成果は、論文 [1] [2] [5] [6] で発表した。何人かの研究者は、この空間に位相が存在するものとして議論を進めていた。論文 [6] では、compatible な位相が存在しない例を挙げた。また、扱いの難しい概念のため、他の研究者による間違い証明が多く見られたため、正しい証明を与えている。論文 [2] では、 $\phi=3$ の場合は、必ず、compatible な位相が存在することを示した。また、 $\phi=4$ の場合は、compatible な位相が存在しない例があることを示した。

(3) 論文 [4] では、Banach の縮小原理の結論である「successive approximation が唯一の不動点へ収束する」という条件の必要十分条件を Boyd-Wong 写像を用いて与えた。ほとんど形式が同じである Matkowski 写像では必要十分条件が得られないことも証明した。この新事実により、Boyd-Wong 写像と Matkowski 写像の特徴が明確になった。

(4) 2次元の absolute normalized norm は、凸関数を用いて表現できることを 1973年に Bonsall と Duncan は示した。論文 [8] では、その凸関数をさらに微分した関数で議論をした。そうすることで、norm の uniform convexity と uniform smoothness に関する議論が簡潔になることを示した。

(5) 論文 [9] では、Zhang, Su そして Cheng によって 2013年に発表された weak P-property の元での best proximity point の存在定理を改良した。定理の無駄な部分を省いただけでなく、彼らの定理の本質部分がよく理解できるような証明を与えた。

(6) 研究代表者は 2008年に generalized nonexpansive 写像という概念を導入した。この概念は非拡大写像を一般化した概念である。論文 [10] では、この写像に関する Krasnoselskii-Mann iteration の収束定理

を得た。2008年の段階では、定義域が compact 凸集合である場合の強収束定理と定義域が Opial 条件を満たす弱 compact 凸集合である場合の弱収束定理が得られていた。しかし、一様凸 Banach 空間の設定の元では、不動点の存在定理は得られていたが、収束定理は得られていなかった。本論文では、空間が一様凸でその dual 空間が Kadec-Klee property を持ち、定義域が有界閉凸集合の場合の弱収束定理を得た。dual 空間が Kadec-Klee property を持つという条件はノルムが Frechet 微分可能という条件よりも弱い条件である。この収束定理は、非拡大写像に関する Reich の収束定理の拡張定理に相当するが、完全な拡張定理ではない。というのも、係数条件に関しては強い仮定を科しているからである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件) すべて査読有

T. Suzuki, B. Alamri & M. Kikkawa, Edelstein's fixed point theorem in generalized metric spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 16 (2015), 2301-2309.

T. Suzuki, B. Alamri & M. Kikkawa, Only 3-generalized metric spaces have a compatible symmetric topology, *Open Mathematics*, 13 (2015), 510-517. DOI: 10.1515/math-2015-0048

M. Kikkawa & T. Suzuki, Fixed point theorems for new nonlinear mappings satisfying Condition (CC), *Linear and Nonlinear Analysis*, 1 (2015), 37-52.

T. Suzuki & B. Alamri, A sufficient and necessary condition for the convergence of the sequence of successive approximations to a unique fixed point II, *Fixed Point Theory and Applications*, 2015:59 (2015), DOI: 10.1186/s13663-015-0302-9

B. Alamri, T. Suzuki & L. A. Khan, Caristi's fixed point theorem and Subrahmanyam's fixed point theorem in ϕ -generalized metric spaces, *Journal of Function Spaces*, 2015 (2015), Article ID 709391. DOI: 10.1155/2015/709391

T. Suzuki, Generalized metric spaces do not have the compatible topology, *Abstract and Applied Analysis*, 2014 (2014), Article ID 458098. DOI: 10.1155/2014/458098

T. Suzuki, Fixed point theorems for a new nonlinear mapping similar to a nonspreading mapping, *Fixed Point Theory and Applications*, 2014:47 (2014), DOI: 10.1186/1687-1812-2014-47

T. Suzuki, p -uniform convexity and q -uniform smoothness of absolute normalized norms on C_2 , *Abstract and Applied Analysis*, 2014 (2014), Article ID 746309. DOI: 10.1155/2014/746309

T. Suzuki, The existence of best proximity points with the weak P-property, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013:259 (2013). DOI: 10.1186/10.1186/1687-1812-2013-259

S. H. Khan & T. Suzuki, A Reich-type convergence theorem for generalized nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 80 (2013), 211-215. DOI: 10.1016/j.na.2012.09.005

[学会発表](計 5 件)

T. Suzuki, ϕ -generalized metric space の位相, 日本数学会年会, 2016年03月18日, 筑波大学(茨城県・つくば市)

T. Suzuki, Topology on ϕ -generalized metric spaces, The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015 (ISBFS 2015), 2015年09月03日, 九州工業大学(福岡県・北九州市)

T. Suzuki, Condition (CC) に関する不動点定理, 関数解析学の研究とその応用, 2015年01月30日, 新潟大学(新潟県・新潟市)

T. Suzuki, Fixed point theorems for Chatterjea mappings, International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (INCAO 2013), 2013年12月22日, Kaohsiung (Taiwan)

T. Suzuki, The Brouwer fixed point theorem, Twenty second International Conference of FIM (Forum for Interdisciplinary Mathematics) on Interdisciplinary Mathematics, Statistics and Computational Techniques (IMSCT 2013 FIM XXII), 2013年11月11日, 北九州国際会議場(福岡県・北九州市)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

鈴木 智成（SUZUKI, Tomonari）
九州工業大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：00303173

(2)研究分担者

加藤 幹雄（KATO, Mikio）
信州大学・工学部・非常勤講師
研究者番号：50090551

本田 あおい（HONDA, Aoi）
九州工業大学・大学院情報工学研究院・准教授
研究者番号：50271119

仙葉 隆（SENBA, Takasi）
九州工業大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：30196985

(3)連携研究者

(4)研究協力者