

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 24 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400150

研究課題名(和文) 時間大域的確率制御とその応用

研究課題名(英文) Stochastic control on a long term and its applications

研究代表者

長井 英生 (NAGAI, Hideo)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：70110848

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：制御項を含む半マルチンゲールの最小化大偏差確率の漸近評価に関して双対性定理を導いた。また、その結果をモデルの不確かさを容認した設定に対応する問題のロバストな評価を得る事に相当する、双対性定理に拡張した。ここでは、対応する双対問題に関するエルゴード型 H-J-B 方程式とその微分に関する解析と、その方程式を確率微分ゲームの問題の H-J-B 方程式と捉える事が鍵となっていた。一方、時間無限範囲で最適消費・投資問題の H-J-B 方程式の解の存在・一意性、及び検証定理を示した。

研究成果の概要(英文)：We have obtained certain duality theorems on large deviation estimates for controlled semi-martingales. Then, we have extended the results to the cases which correspond to the theorems for the robust large deviation estimates in actual financial models when admitting model uncertainty. Here, key analysis was that of the H-J-B equations of ergodic type and its derivatives for the corresponding dual problems, and by regarding them as the H-J-B equations of certain stochastic differential games, the estimates were obtained. On the other hand, we obtained the existence and uniqueness theorems for the solutions to the H-J-B equations of optimal consumption-investment, and verification theorems.

研究分野：確率論

キーワード：large deviation control H-J-B equations duality theorems optimal consumption

## 1. 研究開始当初の背景

まず、数理ファイナンスにおけるアップサイドチャンス最大化、ダウンサイドリスク最小化の問題に動機づけられて進んでいた大偏差確率制御の研究動向及び本研究の位置づけから述べる。資産価値過程の増大度がある目標値を上回る確率を時間大域的に最大化(アップサイドチャンス最大化)する問題を、大偏差原理と関連付けて論じた Pham の仕事(引用文献 )以来、関連する研究が相次いでいたが、この場合は、結果的に大偏差原理でよく知られる Gärtner-Ellis の定理に帰着されるということが知られ、この定理の仮定となっている条件を判定するために、リスク志向的な場合のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の非崩壊の条件を調べる事が主要な問題となった(引用文献 )。一方、資産価値過程の増大度がある目標値を下回る確率を時間大域的に最小化(ダウンサイドリスク最小化)する問題に関しては、状況が異なることが明確になっていた。この問題では、対応するリスク回避的な場合のリスク鋭感的確率制御問題のエルゴード型 H-J-B 方程式と、その方程式の解のリスクパラメータに関する微分が満たす方程式、の両者の解析を行うことが必要となるという新たな展開が生じ、その解析を実行する事で大偏差確率の下からの評価が得られた。そして、これが、問題の本質であることが明確になっていた。こうして、真に大偏差確率制御と呼ぶにふさわしい問題であるという認識があった(引用文献 )。同時にここでは、エルゴード型確率制御とエルゴード型 H-J-B 方程式、時間大域的確率微分ゲームとエルゴード型 Isaacs 方程式の関係を、ある程度一般的に論じておくべき動機づけが同時に派生した。ここに至り、一旦、市場の数理モデルから離れて、ある程度一般的な枠組みの下で、制御項を含む半マルチンゲール汎関数の大偏差確率の評価を得る問

題を、大偏差確率制御問題として定式化し、解析できないであろうかという着想を得ていた。さらに、近年、数理ファイナンスの分野では、“モデルの不確かさ”を容認した設定で、ロバストな解を求める問題を、数学的に厳密に定式化し、その解法を求める事が多くの研究者の関心を呼んでいた。こうして本研究では、一般的な定式化の上で、“モデルの不確かさ”を容認した設定を考え、制御項を含む半マルチンゲール汎関数の大偏差確率のロバストな評価を得る問題を考察しようとするに至った。また、最適投資消費の期待効用最大化に関する時間大域的確率制御問題を考察するときは、消費の効果が現れて、リスク志向的な場合と、リスク回避的な場合との間に、大数の法則のレベルで大きな違いが生じることが、代表者と畑宏明氏、S-J-Sheu 教授との研究連絡を通じて認識されていた。この問題では、対応する H-J-B 方程式は指数型の非線形項を含み、新たな内容を含んでいることが明確になっていた。このようにして、確率論の基本的な極限定理と確率制御を関連付けて研究することを目指す、“時間大域的確率制御とその応用”を研究課題とすることになった

## 2. 研究の目的

まず、1) 制御項を含む半マルチンゲールの確率の大偏差確率の評価に関する双対性定理を導くことを目的とした。特に完全可観測な場合を考察し、可能ならば部分的可観測な場合に発展させることを目指した。

次に、2) モデルの不確かさを容認して、ロバストな評価に関する双対性定理を導くことを目的とした。さらに、3) 最適投資・消費の期待効用最大化に関わる大数の法則のレベルの問題の考察を行うこととした。

本研究は、一旦市場の数理モデルから離れ、より一般的な設定で、確率制御問題と極限定理との関連を深く考察しようとするもので、

独自性の強い研究となっていると思われる。また、そのような普遍化を企図することで、理論の深まりとともに、さらなる応用の広がりを目指した。大偏差原理の研究が、これまで、工学、計算機科学、数理物理学等に広く応用されてきた事実を振り返れば、大偏差確率制御の進んだ研究は各応用分野に大きく貢献する可能性があると思われる。また、手法の面からは、本研究は非線形偏微分方程式の解析を同時にすすめることで、より具体的な解法を追求しており、定量的な結果に結びつきうる研究であるという特色もある。

### 3. 研究の方法

近年 H-J-B 方程式の時間大域的挙動の研究で実績を上げている市原、対称拡散過程に関する大偏差原理や関連する Feynman-Kac 半群のスペクトルの詳しい研究を行っている竹田、および、数理ファイナンスの時間大域的問題の研究で実績をあげている関根、畑を連携研究者として迎え、研究代表者を中心に、研究協力者、貝瀬、Sheu も加えて研究グループを編成した。H-J-B 方程式の中でも 1 階の導関数に関して 2 次の非線形項をもつ方程式の時間大域的挙動は、大偏差確率制御の問題を考察する上で基本的となる。この型の方程式の時間大域的挙動を近年研究している連携研究者市原と連絡を密にとり、研究打ち合わせ、小セミナーを行った。時間大域的問題を考えると、リスク回避的な場合には、リスク鋭感的確率制御問題に対しては、一般に、Verification theorem が成立しない。すなわち対応するエルゴード型 H-J-B 方程式の解から決まるフィードバック制御が、必ずしも無限時間範囲のリスク鋭感的確率制御問題の最適値を与えないということが、引用文献 [1], [2] 等で知られていた。また、上記古典的確率制御問題の最適拡散過程は一般的な条件の下でエルゴード的であることが研究代表者の研究

で知られており、この最適拡散過程の不変測度に関して、エルゴード型 H-J-B 方程式の解が指数可積分である時は、Verification theorem が成立することも知られていた。この問題に関しては連携研究者の関根と認識を共有しており、また、近年の関根の研究による、対称拡散過程を基礎にした問題では、近最適制御過程に関して Verification theorem が成立することがわかっていた。従って、対称拡散過程に関する大偏差原理や関連する Feynman-Kac 半群のスペクトルに関する研究で深い研究を行っている連携研究者の竹田と連絡をとって、研究打ち合わせを行った。与えられた目標成長率に対応する大偏差確率を時間大域的に最小化する最適制御は、ある条件の下で、その目標成長率に応じたリスクパラメータを持つリスク鋭感的確率制御問題の最適制御によって与えられる事が研究代表者の研究 (引用文献 [3], [4]) で明確になっており、漸近的最適制御過程 (時間範囲に応じた最適拡散過程による近似) を採用し、研究を進めた。ロバストな評価に関する双対性定理については、確率微分ゲーム論的定式化を適切に行うことにより、ロバストでない場合と並行した議論が可能であると考えられ、微分ゲームに関する研究実績のある研究協力者、貝瀬と研究代表者との研究打ち合わせ、小セミナーを行って研究を進めた。

### 4. 研究成果

一般的な確率微分方程式の解の汎函数として定義された、制御項を含む半マルチンゲールの最小化大偏差確率の漸近評価に関して双対性定理を導いた。これは、市場の数理モデルに関して、投資家の保有する総資産額の成長率が目標とする値を下回る確率を最小にする大偏差確率の時間大域的挙動に関する従来の結果を一般化したものである。マルコフ過程の加法的汎函数に関する大偏

差原理についてはこれまで広く研究されてきており、また多くの応用が展開されてきている。当該研究は、制御項を含む半マルチンゲールに関する最小化大偏差確率に一般化することにより今後の更なる応用の展開を企図するものである。その結果を得るにあたっては、双対問題に関するエルゴード型 H-J-B 方程式とその解の、リスクパラメータに関する微分に関する解析を深めることと、その方程式を時間無限範囲の確率微分ゲームの H-J-B- Isaacs 方程式と捉えることが鍵となっている。さらに、ここで得られた結果を、モデルの不確かさを容認した設定に対応する問題のロバストな評価に関する双対性定理を示した。これらの結果は、再度、ファイナンスの数理モデルに立ち返り、予め設定された確率過程をベンチマークとし、それを下回る確率に関する最小化大偏差確率の漸近評価や、不確かさを容認した設定でのファイナンスの数理モデルに対する問題へと展開させていく予定である。

一方、時間無限範囲で最適消費・投資問題の H-J-B 方程式の解の存在・一意性、及び強検証定理を示した。この方程式は上で考察した、エルゴード型 H-J-B 方程式にさらに指数型の非線形項が加わったものである。この方程式に関しては、さらに慣性的消費制約の加わった形に発展させることにより、さらに時間大域的挙動の考察が問題となりうると考えられる。

#### <引用文献>

H. Nagai :Down-side risk minimization under prescribed consumption level, Risk and Decision Analysis 3(2012) 191-200

H. Nagai: Downside risk minimization via a large deviations approach, Annals of Applied Probability、vol.22, (2012) 608-669

H. Nagai: Asymptotics of the probability

minimizing a "down-side" risk under partial information, Quantitative Finance, vol.11, (2011) 789-803

H. Nagai: Risk-sensitive asset management, Encyclopedia of Quantitative Finance, Cont, R.(ed.). John Wiley & Sons Ltd. Chichester, UK. (2010) 1589-1593

H. Hata, H. Nagai and S.J. Sheu: Asymptotics of the probability minimizing a "down-side" risk, Annals of Applied Probability, vol. 20, (2010) 52-89

H.Hata-J.Sekine, Applied Math. and Optimization 62 (2010)341-380

H.Pham, Finance and Stochastics 7(2003) 169-195

W.H. Fleming-S.J. Sheu, Math. Finance 10(1999)197-213, Ann.App. Prob. 12 (2002) 730-767

H.Nagai-S. Peng, Annals of Applied Probability 12 (2002) 173-195

#### 5 . 主な発表論文等

( 研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線 )

[ 雑誌論文 ] ( 計 5 件 )

Hideo Nagai, "Robust estimates of certain large deviation probabilities for controlled semi-martingales", Banach Center Publications, vol. 105 (2015)161-194 ( 査 読 有 ) DOI:10.4064/bc105-0-11

Hideo Nagai, "H-J-B equations of optimal consumption-investment and verification theorems", Applied Mathematics and Optimization, vol. 71(2015) 279-311 ( 査 読 有 ) DOI:10.1007/s00245-014-9258-0

Hideo Nagai, "Large deviation estimates for controlled semi-martingales" Interdisciplinary Mathematical Sciences,

vol. 7 (2015) 453-478 (査読有)

K. Fujimoto, H. Nagai and W.J. Runggaldier, "Expected log-utility maximization under incomplete information and with Cox-process observation" Asia-Pacific Financial Markets, vol.21(2014) 35-66 (査読有)  
DOI:10.1007/s10690-013-9176-1

K. Fujimoto, H. Nagai and W.J. Runggaldier, "Expected power-utility maximization under incomplete information and with Cox-process observation" Applied Mathematics and Optimization, vol. 67(2013) 33-72 (査読有)  
DOI:10.1007/s00245-012-9180-2

[学会発表](計 4 件)

Hideo Nagai, "Uniqueness theorems ]for H-J-B equations of optimal consumption-investment and verification theorems", International Workshop on PDEs and related topics, Feb.11~Feb. 15,2014, Hiroshima University, Higashi Hiroshima

Hideo Nagai, "H-J-B equations of optimal consumption and investment", The second conference on engineering and computational mathematics, Workshop 1: Computational and mathematical finance" December 16~ December 18, 2013, Hong Kong Polytech University, Hong Kong

Hideo Nagai, "Robustness on large deviation estimates for controlled semi-martingales", Stochastic Processes and their statistics in finance, October 26~November 1,2013, Naha, Okinawa,Japan

Hideo Nagai, "Large deviation control arising from optimal investment",

Stochastic Analysis and Control, May 5~May 10, 2013, Bedlewo, Poland

[図書](計 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1)研究代表者

長井 英生 (NAGAI, Hideo)  
関西大学・システム理工学部・教授  
研究者番号：70110848

##### (2)研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3)連携研究者

関根 順 (Sekine, Jun)  
大阪大学・基礎工学研究科・教授  
研究者番号：50314399

竹田 雅好 (Takeda, Masayoshi)  
東北大学・理学研究科・教授  
研究者番号：30179650

市原 直幸 (Ichihara, Naoyuki)  
青山学院大学・理工学部・准教授  
研究者番号：70452563

畑 宏明 (Hata, Hiroaki)  
静岡大学・教育学部・助教  
研究者番号：00609290