3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５４００１５４
研究課題名（和文）調和写像理論の深化

研究課題名（英文）Development of Theory of Harmonic Maps

研究代表者
浦川　肇（Urakawa, Hajime）

東北大学・高度教養教育・学生支援機構・名誉教授

研究者番号：５００２２６７９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：　２－調和写像理論とは２－エネルギー汎関数の臨界点の理論で、エネルギー汎関数の臨界点理論である調和写像理論と共に近年、国際的に大きく発展を遂げている。我々は二つの理論が類比と相違を明らかにした。すなわち、２－調和写像が調和写像となるはどのような場合かを明らかにした。一方、調和写像とならないような２－調和写像の例を与え、どのような条件であればそのような事が起るのかを明らかにすることができた。
対称空間内の等質な２－調和部分多様体で、調和写像とはならないものを分類・構成することができた。
又、類比の概念を、葉層多様体の場合やコーシー・リーマン多様体の時に与え、豊富な実例を構成した。

研究成果の概要（英文）：　Harmonic map is a critical point of the energy and biharmonic map is the one of the 2-energy. Both theories have been developed greatly in the world. We have clarified the similarities and differences between these theories, recently. We have constructed several examples of biharmonic maps which are not harmonic maps. We gave and clarified the conditions which biharmonic maps must be harmonic maps.
We have constructed and classified all homogeneous biharmonic submanifolds in the symmetric space which are not harmonic.
We gave the similar notions of biharmonic foliations and also pseudo biharmonic submanifolds in Cauchy-Riemannian geometry, and gave several such examples.

研究分野：微分幾何学及び大域解析学

キーワード：エネルギー汎関数　２－調和写像　調和写像　２－エネルギー汎関数　対称空間　２－調和部分多様体　葉層多様体　コーシー・リーマン多様体

１．研究開始当初の背景

（１）調和写像とは、エネルギー汎関数の臨界点となるリーマン多様体からリーマン多様体への滑らかな写像のことであり、2−調和写像とは、2−エネルギー汎関数の臨界点となるリーマン多様体からリーマン多様体への滑らかな写像のことである。それらの定義より調和写像はいつでも２−調和写像となることが知られている。その逆問題、すなわち、「２−調和写像がどのような場合に調和写像となるか」ということが１９８０年代より重要な課題であると認識される様になった。

（２）とりわけ、ターゲット空間がユークリッド空間の場合には「ユークリッド空間内の２−調和部分多様体は調和であろう」という問題は、特に有名な未解決問題であり、チェン予想と呼ばれている。これはチェンによって１９８０年代に提起された有名な重要問題である。この解決の解決を目指すというのが、我々の当初の一番の研究課題であった。

２．研究の目的

（１）我々はまず、この有名なチェン予想「ユークリッド空間内の 2−調和部分多様体は調和である」ことの解決、また適当な条件の下でチェン予想が正しいことの証明を与えることを目指す。

（２）と同時に、ユークリッド空間ではないコンパクト対称空間の場合には、その２−調和部分多様体の分類を行なうことが可能ではないか、と問題を立てて、その分類を行ないそのことによって、部分多様体理論への貢献を目指す。

（３）すなわち、コンパクト対称空間内の群軌道を調べて、それらの軌道が調和となるもの、及び２−調和となるものを決定することを目指す。

（４）またリーマンサブマーションの場合にも同様な問題を考えることができるので、特に G―主束の場合において、２−調和写像や調和写像を調べることにより、さらに豊富な２−調和リーマンサブマーションの例を与えることを目指す。

３．研究の方法

（１）チェン予想の特別な場合である「ユークリッド空間内の超曲面で、主曲率がすべて相異なる時は解決できる」、と予想し研究を開始した。

（２）まず一般の空間型内の２−調和部分多様体について、テンション場の各点ノルムの二乗が定数である場合には、そのようなものは調和なものに限ることを示す。次に、本来のチェン予想の場合であるところの、空間型の特別の場合であるユークリッド空間内の超曲面の場合に、それが２−調和であるための必要十分条件を、主曲率とテンション場との常微分方程式系によって書き下し、極小超曲面となるのはこれらが共に零であることが必要充分であることを示す。

（３）困難点としては、２−調和写像を与える常微分方程式系が現れる。その解の構造を解析する。しかしこれらの常微分方程式系は実際には解くことはほとんど不可能な方程式系であり、その解が調和写像を与えるもののみであることを示すことは手計算では困難である。その困難点を克服するために、コンピュータを用いて解析する。

（４）一方、コンパクト対称空間内の等質な部分多様体の場合には、表現論や群の主軌道の解析を行なう。このため、井川満による対称三対の方法を用いて、軌道の分類を行なう。

（５）次に、各軌道ごとに、２−調和写像となることを特徴づける２−テンション場、及び調和写像となることを特徴づけるテンション場をそれぞれ計算により求める。

（６）上記の計算結果を数値計算して、確かに、それらの軌道のうちで、２−テンション場は消滅しているが、テンション場の方は零ならないものを探し出す。

（７）１９７９年に江尻典雄（現名城大学）が与えたねじれ束のラプラシアンの等スペクトルに関する結果及び O’Neill が１９６６年で示したリーマンサブマーションに関する結果及びそこで示されている様々な結果と手法などを組み合わせて、調和写像や２−調和写像の研究に適用し、新たな研究手法を開発する。

４．研究成果

（1-1）チェン予想については、ユークリッド空間内の超曲面の主曲率が相異なり、それらの主曲率ベクトル場がそれぞれ既約の場合には、テンション場、主曲率主曲率方向ベクトル場を与える式の導出に、我々は成功し、それらが常微分方程式系を満たすことを示した。この結果、テンション場の各点ノルムの二乗が定数の場合には、上記の予想通りが正しいことを示した。

（１-2）問題はテンション場の各点ノルムの二乗が定数でない場合であり、この場合にはユークリッド空間内の超曲面が２−調和写像であることを特徴づける常微分方程式系の解の挙動を解析し、コンピュータによる解析を実行し、この常微分方程式系の解は零のみであり、従って調和写像を与える解のみであることを示した。この結果として我々は次の定理を得ることができた：「ユークリッド空間内の２−調和な超曲面のすべての主曲率が互いに相異なり、主曲率ベクトル場が一般の位置にあるならば、このような超曲面は極小である」。この結果は、我々の定理の状況の下では「チェン予想は正しい」ことを示すものである。

（２）コンパクト対称空間内の群軌道を詳細に調べるために、リー群の可換な対称三対を取り、この対称三対の群軌道が２−調和であるための必要十分条件、及び調和であるための必要十分条件を与えた。この結果を用いて、コンパクト対称空間内の等質部分空間を与える対称三対をすべて分類し、これらのうちで、群軌道が対称空間の２−調和な等質部分多様体を与えるもの、及び調和な等質部分多様体を与えるもの、これらすべてを分類した。以上の結果を用いることによって、調和ではない等質な 2−調和部分多様体を与えるクラスが多く存在するという、非常に驚くべき結果を得た。特に、エルミート・グラスマン多様体の場合には、その内の等質部分多様体を調べ分類することによって、この場合には、等質な２−調和部分多様体となるものを完全に分類し、等質超曲面であって２−調和であるが調和でないものをすべて分類する、という結果を得た。またこの場合に、余次元の高い調和ではない２−調和となる等質部分多様体の例を与えることができた。

（３）我々はコーシーリーマン多様体からコンパクトリーマン多様体への擬調和写像と擬 2−調和写像を特徴づける定理を与えた。擬調和写像の特徴付けについては、すでに我々と S. Dragomir, B.Barletta との共同研究により示されていた。上記の擬２−調和写像の特徴付け定理を応用して、強擬凸なコーシーリーマン多様体から球面や複素射影空間、四元数射影空間等の階数１のコンパクトリーマン対称空間に適用することにより、それらへの擬平行な擬２−調和等長はめ込みで擬調和等長はめ込みとならないものを決定することができた。更にまた、特に、これらの結果を用いて、奇数次元球面から複素射影空間への擬調和ではない擬 2−調和写像の多くの例を構成することができた。

（４）次に、主 G−主束やねじれ束の場合の調和写像や２−調和写像を調べた。始めに底空間が非正曲率で、全空間が完備リーマン多様体であるような主 G−主束を考察し、この場合については、２−調和写像でありながら、しかも、２−テンション場が二乗可積分となる場合には、すべて２−調和写像は調和であるという結果を得た。さらに底空間がコンパクトリーマン多様体の場合には、２−調和写像はすべて調和であることを示した。更に、ねじれ主束の場合についても考察し、２−テンション場とテンション場をそれぞれ与える公式を示すことができた。この結果を用いて、調和なねじれ束を与える特徴付け定理と２−調和なねじれ束を与える特徴付け定理を与えることができた。今の場合には、２−調和なねじれ束を与える方程式は完全に解くことができて、そのことによって、２−調和であるが調和ではないねじれ束の例を構成することができた。このことは、調和ではない２−調和写像なねじれ束の例が与えられた、という満足すべき結果である。

（５）上記のねじれ束の手法と１９６０年代の O’Neill の手法を用いることによって、一般に、リーマンサブマーションの場合に調和写像と２−調和写像を調べることに応用することができた。これらの手法に加えて、複素射影空間上のサークル束の分類を与える１９５６年の小林昭七による結果を適用することにより、複素射影空間上のすべてのサークル主束について、直積となる場合とホップ主束となる場合を除けば、すべてのサークル主束について、それらが２−調和であるが、しかし調和とはならない、という興味ある重要な定理を得ることができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４　件）

① N. Koiso and H. Urakawa, Biharmonic submanifolds in a Riemannian manifold, Osaka Journal of Mathematics, Vol 55 (2018), 325-346. 査読有り.

② H.Urakawa, Harmonic maps and biharmonic maps on principal bundles and warped products, Journal of Korean Mathematical Society, Vol 55 (2018), 553-574. 査読有り.

③ S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces. Hermitian-Grassmannian submanifolds, Springer Proc. Math. Stat. Vol. 203, Springer,Singapore, 2017, 323-333. 査読有り.

④ H. Urakawa, CR rigidity of pseudo harmonic maps and pseudo biharmonic maps, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 46 (2017), 141-187. 査読有り.

〔学会発表〕（計 5 件）

① H. Urakawa, カード・シャッフル、焼き鈍し，そして拡散過程, 2017 年 12 月 1日, 研究会「離散グラフのスペクトル解析とその応用」、東京工業大学キャンパス·イノベーションセンター.

② H. Urakawa, Harmonic and bi-harmonic immersions and submersions, 2017 年 11 月 16 日, 第１６回多様体上の微分方程式研究会, 金沢大学サテライトプラザ.

③ H. Urakawa, Harmonic maps and bi-harmonic maps, 2017 年 11 月 4 日, 福岡大学微分幾何学研究会, 福岡大学セミナーハウス.

④ H. Urakawa, Bi-harmonic maps on principal bundles and warped products, 2017 年 9 月 27 日、韓国高等数学研究所、微分幾何学セミナー.

⑤ H. Urakawa, Harmonic and bi-harmonic immersions and submersions, 2017 年 5 月 17 日, Harmonic Map Workshop at Brest, フランス、アーバーラッチ国際研究交流センター.

〔図書〕（計 2 件）

① 浦川肇, 高木泉, 藤原毅夫, 微分積分学 第２巻, 内田老鶴圃. 2017 年. 622 頁.

② H. Urakawa, Spectral Geometry of the Laplacian---Spectral Analysis and Differential Geometry of the Laplacian, World Scientific Publishing, Co.Pte.Ltd, 2017 年. 309 頁.

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
浦川 肇 （URAKAWA Hajime）
東北大学・高度教養教育・学生支援機構・名誉教授
研究者番号：50022679

(2)研究分担者
（ ）
研究者番号：

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：

(4)研究協力者
（ ）