

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400158

研究課題名(和文) 共鳴現象の解析による非線形分散型方程式の初期値問題の適切性と漸近挙動の研究

研究課題名(英文) Cauchy problem of nonlinear dispersive equations

研究代表者

津川 光太郎 (Tsugawa, Kotaro)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：70402451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：まず，高次元の場合のZakharov方程式の初期値問題の時間大域的適切性と解の漸近挙動を証明した．証明には U_p, V_p 空間の理論を用いた．証明の難しい部分は連立系の線形方程式がそれぞれ異なる性質を持つ点にある．これを克服するために V_2 空間とStrichartz評価の端点評価に関連するルベグ空間との共通部分を用いた．次に，5階のKdV型の方程式の分類を行った．normal form reductionとenergy法とBona-Smith近似を組み合わせることによって，時間局所適切性と放物型の平滑化効果を証明した．

研究成果の概要(英文)：First, we proved the global well-posedness and asymptotic behavior of the Cauchy problem of Zakharov system in higher dimensions. We used the theory of U_p, V_p space to prove it. The main difficulty comes from the difference of the properties of the linear equations. To overcome it, we used the intersection space of V_2 space and Lebesgue space related to the end-point Strichartz estimate. Second, we categorized the fifth order KdV type equations. By using the normal form reduction, energy method and Bona-Smith approximation, we proved that the local well-posedness and parabolic smoothing effect.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：分散型方程式 適切性 初期値問題 調和解析 シュレディンガー方程式 KdV方程式

1. 研究開始当初の背景

非線形分散型波動方程式の初期値問題の適切性(解の一意存在と初期値に対する解の連続依存性)および時間大域的な解の振る舞いの研究はこの30年間で大きく発展してきた。初期において用いられた手法は線形方程式の研究に用いられた道具を非線形方程式に応用したものに過ぎなかった。しかし、より精密な結果を得るためには線形化方程式の解の性質と非線形項の持つ構造を同時に上手く利用出来るような手法が必要であることが分かり、近年は Bourgain による Fourier 制限ノルムや Shatah の normal form などの応用による非線形方程式に特化した手法が活躍している。これらの手法は、非線形項における自己相互作用を、より精密に評価することを可能にし、方程式の持つ対象性などの幾何的性質を有効に活用することを可能にした。これらの研究を通して、解の滑らかさや長時間挙動における減衰を悪くする原因として共鳴現象があることが分かってきた。特に強い特異性を持つ非線形方程式を考える場合には、一般論を適用するだけでは解けないことが多く、方程式の対処性や共鳴現象を利用することにより、特異性を精密に評価することが重要である。

2. 研究の目的

非線形分散型波動方程式の初期値問題の適切性(解の一意存在と初期値に対する解の連続依存性)および時間大域的な解の振る舞いについて研究する。これらの研究においては、線形化方程式の特徴を上手く利用し非線形項における相互作用を精密に評価することが重要となっている。近年、解の滑らかさや時間減衰を悪くする要因の一つが非線形相互作用における共鳴現象であることが分かって来た。また、非線形分散型方程式の中には可積分系として知られている KdV 方程式のように高い対象性を持つ方程式がある。可積分系にあらわれる高階の KdV 方程式は非線形項が強い特異性を持つにも関わらず、その解は「良い」性質を持つことが分かっている。これは可積分系が強い対称性を持つからである。本研究では、方程式の持つ対称性に着目し、共鳴現象を解析することによりこれまで用いられてきた手法を発展させること、および、初期値問題の適切性の観点から、方程式の対称性と解の特異性の関連を明らかにすることである。

3. 研究の方法

調和解析的手法を用いてそれぞれの方程式の共鳴部分の計算を行う。解の振動効果をとらえるのに適した手法である Fourier 制限ノルム法や Normal form reduction などを適用し微分の損失の回復を行う。関数空間を有効利用し U^p, V^p 空間や short time Fourier 制限ノルムなど最新の道具を用いて

階の対称性をうまく利用することにより、既存の評価式の改良を試みる。これらを非線形 Schrodinger 方程式、KdV 方程式や mKdV 方程式、Zakharov 方程式に適用し、既存の結果の改良を試みる。

4. 研究成果

(1) U^p, V^p 型空間を用いた Zakharov system の初期値問題の小さな初期値に対する時間大域的適切性と漸近挙動に関する研究を行った。Zakharov system は物理的に重要なモデルであるが、非線形項が微分の損失を含む扱いにくい型のものであるため、滑らかさの指数が臨界指数の場合に対する適切性の結果はこれまで無かった。高次元の場合には分散効果が強く得られるので、これを利用すれば証明できると予想されていたが、性質が異なる方程式の連立系であることに起因する困難さがあり、標準的な手法を単純に応用するだけでは評価が閉じず、証明できなかった。本研究では V^2 空間と Strichartz 評価の端点評価にあらわれるルベグ空間の共通空間を用いることによりこの困難を解決し証明することが出来、時間大域的適切性と解の漸近挙動を示すことに成功した。この研究はポストドクターの加藤勲氏との共同研究である。

(2) 3階までの微分を含む非線形項を持つ5階の半線形分散型方程式のトーラス上での時間局所適切性の研究を行った。一般に、半線形方程式の性質は時間局所的には線形部分によって支配されると考えられている。しかし、ある種の非線形項に対しては、線形部分が分散型であるにも関わらず非線形項の影響により放物型方程式の性質があらわれることを発見した。多項式型の非線形項を考え、このような放物型効果を持つ型の非線形項とそうで無いものに完全に分類し、それぞれに対して時間局所適切性を示した。さらにこの結果を、非線形項の微分は3階のまま線形部分を $2k+1$ 階の半線形分散型方程式の場合へと拡張することにも成功した。

(3) 空間一次元のトーラス上の1階の微分を含む非線形項を持つ Schrodinger 方程式の時間局所適切性についての研究を行った。非線形項が微分を含まない方程式は扱いが易しく、古くからたくさんの結果があった。非線形項が u_x というタイプの一階微分に依存する場合には、特別な場合にのみ非適切性の結果が知られていた。また、 u_x の複素共役というタイプの一階微分に依存する場合には、特別な場合にのみ適切性の結果が知られていた。一階の微分の損失を Schrodinger 方程式の線形部分で処理することが難しいため、これらのように特別な場合についての結果しかこれまででは得られてい

なかった．本研究においては，ゲージ変換とエネルギー法と Bona-Smith 近似を組み合わせることにより，非線形項からある種の放物型効果を引き出すことに成功し，適切・非適切な観点から非線形項を完全に分類することに成功した．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

K. Tsugawa, Local well-posedness and parabolic smoothing effect of fifth order dispersive equations on the torus, RIMS Kokyuroku Bessatsu, to appear, 査読あり.

I. Kato and K. Tsugawa, Scattering and well-posedness for the Zakharov system at a critical space in four and more spatial dimensions, Differential and Integral equations, (30), 2017, 査読あり.

[学会発表](計 16 件)

津川 光太郎, Local well-posedness of derivative nonlinear Schrödinger equations on the torus, 研究集会「Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation」, 東京理科大, 2017年2月20日

津川 光太郎, Parabolic smoothing effect and local well-posedness of semilinear fifth order dispersive equations on the torus, 2016 Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier Stokes, Kinetic, and Inverse Problems, 国立成功大学(台湾), 2016年12月25日

津川 光太郎, Local well-posedness and parabolic smoothing effect of semilinear dispersive equations, 第3回 神楽坂非線形波動研究会, 東京理科大, 2016年12月2日

津川 光太郎, Local well-posedness and parabolic smoothing effect of semilinear fifth order dispersive equations on the torus, Harmonic Analysis, Geometric Analysis and PDE Workshop, 埼玉大学, 2016年3月3日

津川 光太郎, Parabolic smoothing effect and local well-posedness of nonlinear dispersive equations on the torus, 波動セミナー(ワークショップ), 北海道大学, 2016年2月8日

津川 光太郎, Parabolic smoothing effect

and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus, 松山解析セミナー2016, 愛媛大学, 2016年2月6日

津川 光太郎, Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus, 熊本大学応用解析セミナー, 熊本大学, 2015年8月1日

津川 光太郎, Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus, RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式, 京都大学数理解析研究所, 2015年7月6日

津川 光太郎, ``Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus'', 研究集会「Nonlinear Evolution Equations and Related Topics」, 2015年3月10日, 京都大学

津川 光太郎, ``Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus'', 九州関数方程式セミナー, 2014年12月12日, 九州大学

津川 光太郎, ``Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus'', 研究集会「The 12th Linear and Nonlinear Waves」, 2014年11月12日, ピアザ淡海滋賀県立県民交流センター

津川 光太郎, ``Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus'', 第1回神楽坂非線形波動研究会, 2014年10月23日, 東京理科大

津川 光太郎, ``5階の非線形分散型方程式の局所適切性'', 日本数学会秋季総合分科会特別講演, 2014年9月27日, 広島大学

津川 光太郎, A cancellation property and the well-posedness of fifth order KdV type equations on the torus, 研究集会「Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation」, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2014年2月20日

津川 光太郎, Well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, 第9回非線形の諸問題, 高知大学, 2013年9月4日

津川 光太郎, On the normal form reduction, 2013 Participating School in Analysis of PDE`Global theory of nonlinear dispersive equations'', Jeju National University Park, 2013年8月27日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

津川 光太郎 (TSUGAWA, K0taro)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70402451