

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400160

研究課題名(和文) 切断近似をしないボルツマン方程式と非線形超局所解析

研究課題名(英文) The Boltzmann equation without angular cutoff and nonlinear microlocal analysis

研究代表者

森本 芳則 (Morimoto, Yoshinori)

京都大学・人間・環境学研究科・名誉教授

研究者番号：30115646

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：ボルツマン方程式の初期値問題を粒子間の長距離相互作用を考慮した仮定のもとで考察した。粒子分布が空間変数によらない場合には、確率測度解の枠組みで解の構成と解の平滑化が、物理的妥当な衝突断面積のほぼすべての場合に示された。粒子分布が空間変数による場合も初期値問題の時間局所解と時間大域解が種々の関数空間の設定で得られた。本研究では衝突角度に関する特異性をもつボルツマン衝突積分作用素に対する超局所的解析が重要である。

研究成果の概要(英文)：The Cauchy problem for the Boltzmann equation is discussed under the assumption in consideration of a long-range interaction of particles. When the particle distribution is homogeneous in space variables, the existence and the smoothing effect of measure-valued solutions are proved in almost all physically reasonable cases of collision cross sections. In the spatially inhomogeneous case, the time local solution and the time global solution are obtained in various function spaces. The micro-local analysis is an important tool in order to handle the Boltzmann collision integral operator with angular singularity.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ボルツマン方程式 衝突積分作用素 非切断近似 解の平滑化 確率測度解 Toscani 型距離 時間大域解 非線形超局所解析

1. 研究開始当初の背景

ボルツマン方程式は L. Boltzmann が 1872 年に導いた非平衡気体運動論の基礎方程式である。気体粒子の衝突について長距離相互作用を考慮すると、衝突を記述する積分項の核は、粒子の衝突角度を変数とした特異性を持ち、厳密な数学的取り扱いを困難にしている。具体的には衝突積分項は粒子の生成項と、消滅項の差の形で導出されているが、この特異性から各項は無限大に発散してしまう。発散を避けるため特異性をもつ部分を取り除く切断近似 (angular cutoff) 条件でボルツマン方程式を議論することが伝統的であるものの、この近似により衝突積分項がもつ特異積分作用素としての豊かな性質も失われる。

特異性をもつ衝突積分項の特徴的性質を述べよう。Maxwell 分布はボルツマン方程式の大域的な平衡解であるが、平衡解のまわりでの摂動解を考察する際に定義されるボルツマン線形化作用素は、衝突積分項の核が衝突する 2 粒子の相対速度によらない簡単な場合、角度因子の特異性の指数 s ($0 < s < 1$) に応じて、調和演算子と球面上の Laplace-Beltrami 作用素との和を s 乗したものと同等な性質を持っている (Wang-Chang-Uhlenbeck (1970)) が、元の一般非線形衝突積分項も、特異積分作用素として (上からと下からの) 同様な性質が一定の条件の下で成立することが Alexandre-Desilletes-Villani-Wennberg (2000) の研究以降、明らかになっていた。

研究代表者は 2005 年から切断近似をしないボルツマン方程式の研究に着手し、研究協力者 (故) 鶴飼正二 (東工大) 名誉教授、海外共同研究者 R. Alexandre, C.-J. Xu, T. Yang 教授との共同研究において、空間非一様な切断近似をしないボルツマン方程式の初期値問題に対して時間大域解を大域的平衡解である Maxwell 分布の摂動して構成することに成功した。また、この時間大域解の平衡解への時間無限での収束安定性を示すと共に、上で述べた切断近似をしないボルツマン衝突積分項の楕円型作用素的な性質から生じる解の平滑効果を、構成した時間大域解を含むより広い解集合に対して明らかにした。更に Maxwell 分布の摂動という枠を超えて、ボルツマン方程式の初期値問題の時間局所解が初期データの空間変数に関するある種の有界性の仮定から構成できることを明らかにしていた。これらの研究は、衝突積分項を擬微分作用素、特異積分作用素などの超局所解析の方法を用いて精密に評価することにより可能となっていた。

2. 研究の目的

上記の共同研究に拘わらず未解決な、切断近似をしないボルツマン方程式に対する解の存在と平滑効果に関する問題をできるだけ広い関数空間で解決することが研究の目的であった。具体的には

(1) 空間一様な場合の測度解の構成と解の平滑効果：初期値が一つの Dirac mass 以外ならば解は時間正で無限回微分可能となること。

(2) 空間非一様な場合に、できるだけ広い関数空間での解の構成法。

3. 研究の方法

(1) 代表者と海外研究協力者、C.-J. Xu, N. Lerner, K. Pravda-Starov (在仏), T. Yang (在香港) は、各年度、数回にわたり、京都大学、Rouen 大学、香港城市大学で大型黒板、ホワイトボード、プロジェクターを用いて共同研究の機会をもった。討論結果を記録した画像ファイルをもとに e-メールにより共同研究を深化させた。

(2) 代表者は分担者である清水扇丈氏から非線形偏微分方程式に用いられる Besov 空間等の関数空間の理論と非線形偏微分方程式への応用についての的確な知識の提供を受けた。

4. 研究成果

(1) 空間一様なボルツマン方程式に対し、非負な測度を初期値とする弱解の存在と解の平滑化を考察した。衝突積分項の核が衝突する 2 粒子の相対速度によらないマクスウェル型の場合に、まず、初期値が確率測度で 1 点のみの台をもつ場合 (Dirac デルタ) を除いて、時刻正で測度解は直ちに無限回微分可能となることを明らかにした (論文③)。この結果により、Bobylev-Cercignani が構成した空間一様なマクスウェル型ボルツマン方程式の初期値問題の (エネルギー無限大) 自己相似解は無限回微分可能関数であることが従う。論文③では Cannone-Karch (2010) と同様、無限大のエネルギーをもつ (確率) 測度解が、一般化された Toscani 距離により解析されていたが、2 次未満のモーメントが有限な確率測度を特徴づけるには、この距離だけでは不十分であった。確率測度のフーリエ像の積分評価を加味した距離づけにより、1 次モーメントをのぞき、すべての場合を完全に扱うことが可能となった (論文④)。除外されていた 1 次モーメント有限な確率測度の特徴づけが、論文⑩で、確率測度のフーリエ像の 2 階差分を考察することにより可能となった。マクスウェル型空間一様なボルツマン方程式の初期値問題の解の安定性評価式は、他の場合と比べて格段に複雑になるが成立する。論文⑧では確率測度のフーリエ像の 2 階差分を繰り返し取ることにより、任意の 2 次以上のモーメント有限な確率測度を特徴づけることに成功した。応用として、論文③、④、⑩の測度解の平滑効果の結果を合わせると、 $(2 < m)$ 次モーメント有限な確率測度を初期値とする測度解は、時刻 $t > 0$ で m 次モーメント付き可積分関数の位相で連続であることが従う。論文⑫では、確

率測度のフーリエ像の2階差分を繰り返し取ることによって得られたモーメント有限な確率測度の特徴づけが, Monge-Kantorovich-Wasserstein 距離による位相と同値であることが示された。論文⑨では空間一様なボルツマン方程式の測度解の存在と測度解の平滑効果について, ソフト・ハードポテンシャルの場合について考察した。測度解の構成についてはフーリエ変換を用いてソフト・ハードポテンシャルの両方について統一的な方法を与えた。平滑効果についてはマクスウェル型の場合を扱った論文③と同様な結果を得た。また論文⑩では無限大のエネルギーをもつ(確率)測度解の Bobylev-Cercignani 自己相似解への漸近挙動が示された。エネルギー有界な場合は, 大域的平衡分布である Maxwell 分布へ収束するので極めて特異な現象である。論文②ではマクスウェル型ボルツマン方程式に対し Maxwell 分布のまわりでの摂動解が radially symmetric な場合, 摂動解は, それ自身とフーリエ像の両方が, 衝突項の角度特異性に応じた指数の超解析的な (Gelfand-Shilov) 平滑効果を得ることを明らかにした。

(2) 空間非一様なボルツマン方程式の初期値問題の解をできるだけ広い関数空間で構成することについて: 論文①では, 衝突積分作用素に対し, 分数べきの微分を作用することにより, 時間局所解の存在定理が初期値の(微分回数に関する)仮定を緩めても成立することを明らかにした。また, 非線形衝突積分項の線形化作用素による評価について改良版を与えた。論文⑥では, ソフトポテンシャルの場合で, 積分核の角度特異性の指数が $s < 1/2$ の場合に速度変数についてある程度の多項式オーダーの減衰があれば, 時間局所解が, 適当な指数のソボレフ空間で存在することが示された。論文⑦では, 大域的平衡解のまわりでの摂動解が時間大域的に存在することを, 初期値に関する仮定としては最良と思われる条件で与えた。具体的には, 初期値について空間変数に関する Besov 空間による微分可能性を仮定するのみである。この改良には論文①で得られた非線形衝突積分項の線形化作用素による評価が重要であった。論文⑤では空間一次元ボルツマン方程式のモデルである Kac 方程式の初期値問題について, Maxwell 分布のまわりでの摂動解が Gelfand-Shilov 平滑効果のみたすことが明らかにされた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Local existence with mild regularity for the Boltzmann equation, *Kinet. Relat. Models*, 査読有,

6 (2013), 1011-1041

- ② N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov, and C.-J. Xu, Gelfand-Shilov smoothing properties of the radially symmetric spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff, *J. Differential Equations*, 査読有, 256 (2014), 797-831
- ③ Y. Morimoto and T. Yang, Smoothing effect of the homogeneous Boltzmann equation with measure valued initial datum, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 査読有, 32 (2015), 429-442
- ④ Y. Morimoto, S. Wang and T. Yang, A new characterization and global regularity of infinite energy solutions to the homogeneous Boltzmann equation, *J. Math. Pures Appl.*, 査読有, 103 (2015), 809-829
- ⑤ N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov, and C.-J. Xu, Gelfand-Shilov and Gevrey smoothing effect for the spatially inhomogeneous non-cutoff Kac equation, *J. Funct. Anal.* 査読有, 269 (2015), 459-535
- ⑥ Y. Morimoto and T. Yang, Local existence of polynomial decay solutions to the Boltzmann equation for soft potentials, *Analysis and Applications*, 査読有, 13 (2015), 663-683
- ⑦ Y. Morimoto and S. Sakamoto, Global solutions in the critical Besov space for the non-cutoff Boltzmann equation, *J. Differ. Equation*, 査読有, 261 (2016), 4073-4134
- ⑧ Y.-K. Cho, Y. Morimoto, S. Wang and T. Yang, Probability measures with finite moments and the homogenous Boltzmann equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 査読有, 48 (2016), 2399-2413
- ⑨ Y. Morimoto, S. Wang and T. Yang, Measure valued solutions to the spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff, *J. Statist. Phys.*, 査読有, 165 (2016), 866-906
- ⑩ Y. Morimoto, S. Wang and T. Yang, Moment classification of infinite energy solutions to the homogeneous Boltzmann equation, *Analysis and Applications*, 査読有, 15 (2017), 391-411
- ⑪ Y. Morimoto, T. Yang and H. Zhao, Convergence to the self-similar solutions to the homogeneous Boltzmann equation, *J. Eur. Math. Soc.*, 査読有, 19 (2017), 2241-2267
- ⑫ Y.-K. Cho, Y. Morimoto, S. Wang and T.

Yang, A remark on the generalized Toscani metric in probability measures with moments, RIMS K^{oky}uroku Bessatsu, 査読有, 67(2018), 25-42

[学会発表] (計 16 件)

- ① Y. Morimoto, The Asian Mathematical Conference 2013, BEXCO, Busan, Korea, 招待講演, July 2, 2013, Singular change of variables between post- and pre-collisional velocities in the Boltzmann equation
- ② Y. Morimoto, 15th RIMS Workshop on Math. Anal. in Fluid and Gas Dynamics, Kyoto University, 招待講演, July 12, 2013, Local solutions with polynomial decay in the velocity variables to the Boltzmann equation for soft potentials
- ③ Y. Morimoto, RIMS Workshop, Kinetic Modeling and Related Equations: Conference in Memory of Seiji Ukai, Kyoto University (Rakuyu-Kaikan), 招待講, October 28, 2013, Local existence near vacuum with mild regularity for the Boltzmann equation
- ④ Y. Morimoto, Groupe de travail en EDP et Analyse Complexe, Laboratoire de Mathematiques Raphael Salem, Universite de Rouen, France, 招待講演, March 20, 2014, A new characterization and global smoothing effect of measure-valued solutions to the homogeneous Boltzmann equation
- ⑤ Y. Morimoto, RIMS Workshop, Regularity and Singularity for Partial Differential Equations with Conservation Laws, Kyoto University, 招待講演, May 29, 2014, Global smoothing effect of infinite energy solutions to the homogeneous Boltzmann equation of Maxwellian molecules
- ⑥ Y. Morimoto, International Conference: Boltzmann, Vlasov and related equations: last results and open problems, Universidad de Cartagena, Colombia, 招待講演, June 26-27, 2014, Local existence of polynomial decay solutions in the velocity variable to the non-cutoff Boltzmann equation for soft potentials
- ⑦ Y. Morimoto, Nonlinear Evolution Equations and Related Topics Rm. 305, Bldg. Sci. 3, Kyoto University, 招待講演, March 9, 2015, Global solutions in spatially critical Besov spaces for the non-cutoff Boltzmann equation" of hard potentials
- ⑧ Y. Morimoto, Conference Physique Mathematique, Universite de Nantes, Lecture Hall Pasteur of Sciences

Campus(Lombarderie)- Building 2, 招待講演, February 6, 2015, Recent topics on the Boltzmann equation without angular cutoff

- ⑨ Y. Morimoto, Oxbridge PDE Workshop Lecture Room L5, Mathematical Institute, Oxford, 招待講演, March 23 2015, Recent topics for the non-cutoff Boltzmann equation
- ⑩ Y. Morimoto, 10th International ISAAC Congress E4-Central Teaching Building, University of Macau, 招待講演, August 05, 2015, On the existence and regularity of solutions for the non-cutoff Boltzmann equation
- ⑪ Y. Morimoto, CAU-Kyoto University Joint Workshop on Nonlinear PDEs, Seo-gwi-po KAL hotel, 招待講演, September 21, 2015, Measure valued solutions for the spatially homogeneous Boltzmann equation
- ⑫ Y. Morimoto, 2015 International Conference on Nonlinear Analysis: Kinetic Theory and Related Topics, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, 招待講演, October 31, 2015, Some remarks on the global well-posed theory around the equilibrium for the non-cutoff Boltzmann equation
- ⑬ Y. Morimoto, Seminar on Analysis, City University of Hong Kong, B6605, Blue Zone, Level 6, Academic 1, 招待講演, November 16, 2015, Global solutions in the critical Besov space for the Boltzmann equation without angular cutoff
- ⑭ Y. Morimoto, Groupe de travail en EDP et Calcul Sceintifique, Laboratoire de Mathematique Raphael Salem, Universite de Rouen, 招待講演, March 24, 2016, Measure valued solutions with finite moments for the spatially homogeneous Boltzmann equation
- ⑮ Y. Morimoto, Workshop on Analysis and Applications of PDEs. The Hong Kong Polytechnic University, 招待講演, April 8, 2017, Generalized Toscani metric and the spatially homogeneous Boltzmann equation
- ⑯ 森本芳則, 数学談話会 金沢大学理工学域 角間キャンパス (数学棟 4F コロキウム3 室, 招待講演, 2017 年 7 月 12 日, 切断近似をしないボルツマン方程式

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森本 芳則 (MORIMOTO, Yoshinori)
京都大学・大学院人間・環境学研究所・名誉教授

研究者番号： 3 0 1 1 5 6 4 6

(2) 研究分担者

清水 扇丈 (SHIMIZU, Senjou)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・
教授
研究者番号： 5 0 2 7 3 1 6 5

(3) 連携研究者 無

(4) 海外研究協力者

Nicolas Lerner
パリ 6 大学・数学科教授 仏

Karel Pravda-Starov
レンヌ大学・数学科教授 仏

Chao-Jiang Xu
ルーアン大学・数学科教授 仏

Tong Yang
香港城市大学・数学科教授 香港

Yong-Kum Cho
ソウル中央大学・数学科教授 韓国