

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400161

研究課題名(和文) 高周波漸近解析による非線形偏微分方程式の研究

研究課題名(英文) High frequency asymptotic analysis for nonlinear partial differential equations

研究代表者

砂川 秀明 (Sunagawa, Hideaki)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80375394

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：高周波漸近解析の手法に基づいて双曲型および分散型の非線形偏微分方程式の解の諸性質を研究した。非線形シュレディンガー方程式の小振幅解のライフスパンの下限についての精密な漸近評価を与えることに成功した。また、複数の質量項を有するシュレディンガー方程式の非線形連立系における共鳴現象や零構造、消散構造などについていくつかの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Nonlinear partial differential equations of hyperbolic and dispersive type have been studied from the viewpoint of high frequency asymptotic analysis. A sharp lower bound estimate for the lifespan of small data solutions to nonlinear Schrodinger equations has been provided. Several results have been obtained concerning resonance-type behavior, null structure and dissipative structure for nonlinear Schrodinger systems with multiple masses.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：高周波漸近解析 非線形 双曲型方程式 分散型方程式

1. 研究開始当初の背景

双曲型および分散型方程式は広義の波動現象に由来する偏微分方程式のクラスであり、その非線形相互作用下における解の振る舞いを明らかにすることは、数学的な興味はもとより、応用上も大変重要であると広く認識されている。この20年余りの間に非線形双曲型および分散型方程式に対する解の存在・一意性・初期値連続依存性といったいわゆる「適切性」の研究は目覚ましく進展したが、その主要な手法は適当な関数空間の設定とその中で適当な評価式を導くことであり、解の形状そのものに直に立ち入ることができるのは依然として相当限定されている。解の形状についての詳しい情報を得たいのであれば、評価式を導くことよりも適当な近似解を見出して解の主要部を取り出す方が素直であろう。そのような発想に基づくアプローチの一つが、漸近解の方法である。線形の偏微分方程式に対しては重ね合わせの原理が成り立つので、この方法は大変効果的に機能する。特に、波動方程式(双曲型)に対する幾何光学近似とシュレディンガー方程式(分散型)に対する準古典近似は高周波漸近解析の2大モデルである。それらの研究が超局所解析やフーリエ積分作用素の理論を誕生させ発展させたことを思い出すならば、それらの非線形版に相当する手法を整備して一つの理論体系に昇華させることは大変興味のある問題であると考えられる。非線形方程式に対する高周波漸近解析の試みは過去にも多くの研究者によって数多くなされてきたが、それでもなお、非線形性に起因する種々の困難を克服できたとはまだ言い難い状況であり、一層の研究が俟たれている。

2. 研究の目的

上記のような状況を踏まえて、本研究では漸近解の考察を軸にして非線形双曲型および分散型方程式の解の形状についての詳細な知見を得る方法を確認することを目標とした。特に双曲型方程式の代表格である波動方程式、分散型方程式の代表格であるシュレディンガー方程式、および両者の中間的な性格を有するクライン・ゴルドン方程式の3つを主な考察対象として、幾何光学近似や準古典近似に代表される高周波漸近解析の非線形版に相当する方法を整備・発展させるとともに、関連する諸問題に応用することを目指した。

3. 研究の方法

以下の3つの項目に主眼を置いて研究を行った。

- (1) 非線形シュレディンガー方程式の小振幅解の有限時間爆発とそのライフスパンの漸近評価に関する、高周波漸近解

析の視点からの研究。

- (2) 複数の質量項を有する非線形クライン・ゴルドン方程式系および非線形シュレディンガー方程式系における共鳴現象と、零構造および消散構造の解析。特に質量共鳴下における解の長時間漸近挙動の解明。
- (3) 関連する諸問題への高周波漸近解析への応用。例えば非線形波動方程式の外部問題や、水面波の長時間安定性解析への適用可能性の検討。

4. 研究成果

- (1) 2次元 Euclid 空間上の波動方程式の非線形連立系における消散構造について考察した。より具体的には、Klainerman と Chistodoulou の意味での零条件が満たされない場合でも、非線形項の形状から定義されるある関数が単位円周上で符号を一定に保つならば解は時間大域的に存在することを証明した。また、それより少し強い条件の下ではエネルギー減衰が起こることを示し、さらにその際の減衰レートを特定した。この仕事で導入された構造条件は、単独方程式の場合に「Agemi の条件」と呼ばれている条件の、連立系への自然な拡張とみなすことができる(片山聡一郎氏、松村昭孝氏との共同研究; 論文)。
- (2) 2次元 Euclid 空間において2次の微分型非線形項を伴うシュレディンガー方程式系の零構造について考察し、質量共鳴下において漸近自由な時間大域的古典解が存在するための非線形項の形状に関する構造条件を与えた。この条件は、波動方程式に対してよく知られている構造条件のシュレディンガー方程式における自然な類似物とみなすことができる(池田正弘氏、片山聡一郎氏との共同研究; 論文)。
- (3) 消散型非線形項を伴うシュレディンガー方程式系の小振幅解の時刻無限大における漸近挙動について考察し、係数に関する適当な条件下において解の減衰レートが自由発展に比べて真に速くなることを証明し、その正確な減衰レートの評価を与えた。単独でべき乗型非線形項を伴う場合には下村明洋氏や北直泰氏などによって同様の結果は得られていたが、その手法は連立系に対しては適用できないものであった。これに対し、本研究において開発した手法は連立系に対しても適用可能であり、下村氏・北氏による先行研究の拡張と

みなすことができる(片山聡一郎氏、Chunhua Li 氏との共同研究; 論文)。この結果はさらに、非線形項に未知関数の微分が含まれる場合にも拡張され、複数の質量項を伴う微分型非線形シュレディンガー方程式系の非線形消散構造と零構造の特徴づけを与えることに成功した。結果として、空間1次元で非線形項が斉3次である場合には、質量共鳴条件が満たされる場合と満たされない場合それぞれについて、かなり満足できる構造条件が得られた(Chunhua Li 氏との共同研究; 論文および論文)。また、この方法の種々の応用可能性についての検討を行い、非線形消散項を伴うクライン・ゴルドン方程式系に対する解の減衰に関して既存の結果を大幅に拡張することに成功した(Donghyun Kim 氏との共同研究; 論文)。

- (4) 1次元 Euclid 空間上の微分型非線形シュレディンガー方程式に関して、非線形項にゲージ不変な項とそうでない項が混在する場合に、解のライフスパン下限についてのほぼ最適と思われる評価式を導いた。非線形項がゲージ不変な項のみからなる場合には2006年に代表者自身が同様の結果を得ていたが、今回得られた結果はその拡張であるとともに、初期値および解の属する関数空間の観点からも改善がなされている。波動方程式に対しては John と Hörmander による有名な結果があり、それは Christodoulou と Klainerman の意味の零条件と密接な関係を持つことがよく知られている。今回得られた結果は John と Hörmander の結果のシュレディンガー方程式に対する自然な類似物とみなすことのできるものである(佐川侑司氏との共同研究; 論文)。また、その後もこの問題について研究を進め、空間次元が2および3の場合にもある程度は結果を拡張できることを確認した(佐川侑司氏、保田舜介氏との共同研究)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8件)

Soichiro Katayama, Chunhua Li and Hideaki Sunagawa, *A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D*, *Differential and Integral Equations*, vol.27 (2014),

p.301-312, 査読あり.

Donghyun Kim and Hideaki Sunagawa, *Remarks on decay of small solutions to systems of Klein-Gordon equations with dissipative nonlinearities*, *Nonlinear Analysis*, vol.97 (2014), p.94-105, 査読あり.

Masahiro Ikeda, Soichiro Katayama and Hideaki Sunagawa, *Null structure in a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations*, *Annales Henri Poincaré* vol.16 (2015), p.535-567, 査読あり.

Soichiro Katayama, Toshiaki Matoba and Hideaki Sunagawa, *Semilinear hyperbolic systems violating the null condition*, *Mathematische Annalen*, Vol.361 (2015), p.275-312, 査読あり.

Soichiro Katayama, Akitaka Matsumura and Hideaki Sunagawa, *Energy decay for systems of semilinear wave equations with dissipative structure in two space dimensions*, *NoDEA*, vol.22 (2015), p.601-628, 査読あり.

Chunhua Li and Hideaki Sunagawa, *On Schrödinger systems with cubic dissipative nonlinearities of derivative type*, *Nonlinearity*, vol.29 (2016), p.1537 -1563, 査読あり.

Yuji Sagawa and Hideaki Sunagawa, *The lifespan of small solutions to cubic derivative nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser.A*, vol.36 (2016), p.5743 - 5761, 査読あり.

Chunhua Li and Hideaki Sunagawa, *Remarks on derivative nonlinear Schrödinger systems with multiple masses, to appear in the proceedings of the conference "Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations,"* 査読あり.

[学会発表](計 9件)

Hideaki Sunagawa, *Null structure*

in a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations, Mexico-Japan joint meeting on PDE at Morelia, 2013/9/5, メキシコ国立自治大学 (メキシコ).

Hideaki Sunagawa, *Null structure in a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations*, 第 3 回弘前非線形方程式研究会, 2013/11/18, 弘前大学.

Hideaki Sunagawa, *Null structure in derivative nonlinear Schrödinger systems*, 1st Partial Differential Equations Seminar in Yanbian University, 2014/9/17, 延边大学 (中国).

Hideaki Sunagawa, *Agemi-type structural condition for systems of nonlinear wave equations*, 第 32 回九州における偏微分方程式研究集会, 2015/1/30, 九州大学.

Hideaki Sunagawa, *On Schrödinger systems with cubic dissipative nonlinearities of derivative type*, Workshop on partial differential equations and numerical analysis, 2015/7/7, 延边大学 (中国).

砂川 秀明, Chunhua Li, *微分型の非線形消散項を伴うシュレディンガー方程式系について*, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015/9/15, 京都産業大学.

佐川 侑司, 砂川 秀明, *The lifespan of small solutions to cubic derivative nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, 日本数学会 2016 年度年会, 2016/3/19, 筑波大学.

Hideaki Sunagawa, *The lifespan of small solutions to cubic derivative nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, Kyoto 2016, 2016/9/6, 京都大学.

Chunhua Li, 砂川 秀明, *Remarks on derivative nonlinear Schrödinger systems with multiple masses*, 日本数学会 2016 年度年会, 2017/3/27, 首都大学東京.

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

砂川 秀明 (Sunagawa Hideaki)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 80375394