

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400163

研究課題名(和文) 異常拡散を記述する発展方程式の研究

研究課題名(英文) Research on Evolution Equations Describing Anomalous Diffusion

研究代表者

赤木 剛朗 (Akagi, Goro)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号：60360202

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：自然現象や社会現象に於いて、拡散現象が重要な役割を果たしているケースは珍しくない。拡散現象の古典論は既に前世紀中に確立しているが、その後、古典論では説明できないような拡散現象が多数知られるようになり、それらは異常拡散と分類されて多くの注目を集めている。本研究課題では、そのような異常拡散を数学的に解析するために必要な理論の構築を行った。ここでは特に、非線形拡散と呼ばれる非線形偏微分方程式に基づくアプローチの特性を活かした拡散モデルに焦点を当て、適切性(方程式を適切に解くことができるか)などの基本的な問題や、解の漸近挙動やグラフの漸近形状に関する問題に取り組み、問題の解決を通して理論を発展させた。

研究成果の概要(英文)：In natural and social phenomena, diffusion phenomena often play a crucial role. The classical theory on diffusion phenomena has already been established in the last century; however, there arose many diffusion phenomena presenting peculiar appearance beyond the scope of the classical theory. Such exceptional diffusion phenomena are classified as "anomalous diffusion" and attracting much interest in various fields. In this research project, a mathematical theory is developed in order to analyze anomalous diffusion. More precisely, the so-called "nonlinear diffusion" models, which are formulated in terms of nonlinear partial differential equations, are mainly treated. Furthermore, fundamental issues such as the well-posedness of each equation are justified and asymptotic behaviors and profiles of solutions are revealed. By virtue of solving each problem, we have developed a mathematical theory for anomalous diffusion.

研究分野：解析学

キーワード：非線形解析 発展方程式 異常拡散 非線形拡散 変分法

1. 研究開始当初の背景

砂岩中の天然ガスや地中の汚染流体の拡散は拡散する粒子の平均2乗変位が経過時間に比例する(つまり拡散係数が定数である)古典的な拡散過程(正常拡散)から大きなずれを持つことが知られており、そのような拡散過程は異常拡散として分類されている。近年では生体内輸送や環境中の汚染物質の拡散に現れる異常拡散が注目を集める他、異常拡散は様々な現象で観測されており、非平衡系の統計力学、確率論、細胞生物学、また環境工学をはじめとする工学諸分野でも異常拡散現象の学術的重要性はますます高まっている。一方、偏微分方程式論の研究では、多孔質媒体方程式や非線形ラプラスアンを拡散項に持つ非線形拡散方程式が1960年代から盛んに研究されている。これらの方程式の解が記述する非線形拡散も正常拡散と異なる様相を呈するため、異常拡散として分類される。

2. 研究の目的

本研究の目的は、異常拡散を記述する幾つかの発展方程式に焦点を当て、それらの初期値問題に対する適切性(解の存在、一意性、データ連続依存性)、正則性や対称性などの解の定性的性質、解の漸近挙動を調べ、各方程式の特徴を明らかにすること、更に個々の解析で有効な手法を確立することである。

3. 研究の方法

具体的に以下に挙げる問題について取組み、その解決や派生する問題の解析を通して、必要な数学理論の構築を行う。

- (1) Fast Diffusion 方程式の解の漸近形の対称性と安定性の関係の解明
- (2) 変動指数を含む非線形拡散方程式に適した発展方程式論のフレームワーク構築
- (3) 劣線形増大度を伴う半線形熱方程式の解の長時間挙動の解析
- (4) 強い不可逆性を伴う発展方程式の可解性と解の長時間挙動について

4. 研究成果

- (1) Fast Diffusion 方程式の解の漸近形の

安定性解析について

漸近形が関数空間上で孤立しない場合、その安定性を判別する手段がなかった。そのような例外的なケースに対する研究として、十分薄い円環領域に於ける球対称な漸近形の安定性解析を行い、領域が球対称にもかかわらず球対称な漸近形が不安定であることを、空間2次元の場合に限って証明した。つまり球対称に限りなく近い初期状態からスタートしても、時間と共に球対称性が崩れてゆくことが実際に起こるということを証明した。副産物として、ここで開発した摂動法と Fast Diffusion フローが、楕円型方程式の最小エネルギー解の対称性の破れを証明する道具立てとなることを示した。(論文 [3][8][10] 参照)その他、孤立していない最小エネルギーを有する漸近形の安定性解析についても情報収集を行った。

- (2) 変動指数を含む非線形拡散方程式に対する発展方程式的枠組みの構築

空間変数に依存するような指数を含む非線形拡散モデルが近年研究されるようになったが、関数解析的な道具立てが整備されたのに比べ、発展方程式論的な枠組みは未発達であり指数の上限か下限をとり既存の枠組みに押し込めるような結果が多かった。そのため、ロスが生じてしまったり、変動指数の特徴が現れないような結果が多数存在する。ここでは Hille-吉田理論、高村-Brezis理論で用いられている道具立て(吉田近似、Moreau-吉田正則化等)を変動指数にマッチする形で再定義し、それらの性質を調べ、改めて基礎理論を構築することで、変動指数を含む方程式により適した枠組みの提案を行った。(論文 [5][7] 参照)

- (3) 劣線形増大度を伴う半線形熱方程式の解の長時間挙動の解析

劣線形増大度を伴う半線形熱方程式では、初期値(境界値)問題の解の一意性が一般には崩れることが知られている。一方、正值解に

限れば解の一意性や比較原理が復活することも知られている。しかし、解の一意性が欠落するため、符号変化する解まで考慮した解の長時間挙動の分析、特に定常解の安定性解析は取り扱われていなかった。ここでは、正值定常解付近に於ける線形化作用素のスペクトル解析を行い、その結果を用いて最適なレートを伴う正值定常解の指数安定性を証明した。(論文 [2] 参照)

(4) 強い不可逆性を伴う発展方程式の可解性と解の長時間挙動について

破壊工学やある種の相転移現象のモデルに於いて、解がエネルギー汎関数を現象させる勾配系であるとともに、時間に関して非現象になる性質を併せ持つ発展方程式が知られている。ここでは、そのような強い不可逆性を持つ勾配系の一例を取り上げ、その解の構成、そして解が有限時間で爆発することを示した(これは対称となる素材の破断が有限時刻で起こることを示唆する)。(論文 [4] 参照)

(5) それ以外の研究成果と予備的調査

異常拡散を記述するような発展方程式を、軌道ごとに値をとる汎関数の最小化問題で近似する変分的定式化を提案し、近似された関数の収束性とターゲットとする解の再現性を証明した。ここでは特に、非凸なエネルギー汎関数を有するようなケース(例えば反応項を伴う拡散方程式など)をカバーするような理論の構築に成功した。(論文 [1][6][9] 参照)本課題は研究計画当初には予定されていなかったが、ある種の異常拡散を記述する方程式の可解性の証明に有効な選択肢となる可能性が生じたため、追加課題として行った。また近年では、このような変分的定式化を用いて、非線形性が強く解の一意性や正則性が期待できないような発展方程式に対して、解の対称性の証明や比較原理が成り立つサブクラスの構成が可能であることが知られるようになっており、今後の発展が期待できる試みと言える。その他、異常拡散を記述する確率過程の生成作用素である分数冪ラプラシアンを含む非線形拡散方程式等に関する調査を行い、関数解析

的な枠組みの検討などを行った。

(6) 個別の課題研究を通じた理論的枠組みの展開と今後への展望について

(1)~(4)までの個別の研究課題を通して、異常拡散を記述する発展方程式の解析に必要な枠組みの提案を行った。(1)では有限時刻で解が消滅するような非線形拡散方程式に対して、解の漸近形の安定性解析という新しい問題意識を提案するとともに、その基盤となる理論的枠組みを構築した。これは(1)で扱った Fast Diffusion 方程式に限らず、同様の構造を持つ方程式に対しても適用が可能である。またここで提案した球対称な漸近形に対する摂動法は、楕円型方程式の解の対称性の分析に転用が可能である。その他、不安定性の証明で用いた手法は、他のエネルギー消散構造を有する力学系の定常点の不安定性の証明にも応用が可能である。(2)では特に、発展方程式論で広く用いられている Hille-吉田理論、及び、その非線形版である高村 - Brezis 理論に現れる諸概念(吉田近似、Moreau-吉田正則化など)の定義を見直し、変動指数空間上の発展方程式に対して有効な修正を与えている。これらは変動指数空間上の発展方程式に限らず、冪乗などの標準的な増大度の枠組みでは正確に扱えない非線形項全般に有効な道具立てとなっている。(3)は、解に一意性がないような方程式に対して、解の漸近挙動を詳細に特定する研究のモデルケースとなっており、ここで考案したステップを応用することで、同様の性質を持つ方程式の漸近挙動の解析が期待される。(4)では強い不可逆性とエネルギー消散構造を有する発展方程式に対する関数解析的な枠組みが提案されており、それらは解が有限時刻で爆発せず、定常解に収束するようなケースに対しても有効である。そのような場合、解が定常解に収束しようとする性質と解が単調増加しようとする性質がせめぎ合い、解の挙動はより複雑で興味深いものとなる。今後は、強

い不可逆性を有する発展方程式の個別の解析を重ね、より普遍性の高い理論の提案を目指す。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

- [1] Goro Akagi, Ulisse Stefanelli, A variational principle for gradient flows of nonconvex energies, *Journal of Convex Analysis* 23 (2016), no.1, 053-075. 査読有
- [2] Goro Akagi, Ryuji Kajikiya, Stability of stationary solutions for semilinear heat equations with concave nonlinearity, *Communications in Contemporary Mathematics* 17 (2015), no.6, 1550001(29 pages). 査読有
- [3] Goro Akagi, Ryuji Kajikiya, Symmetry and stability of asymptotic profiles for fast diffusion equations in annuli, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire* 31 (2014), no.6 1155-1173. 査読有
- [4] Goro Akagi, Local solvability of a fully nonlinear parabolic equation, *Kodai Mathematical Journal* 37 (2014), no.3, 702-727. 査読有
- [5] Goro Akagi, Giulio Schimperna, Subdifferential calculus and doubly nonlinear evolution equations in L_p -spaces with variable exponents, *Journal of Functional Analysis* 267 (2014), no.1, 173-213. 査読有
- [6] Goro Akagi, Ulisse Stefanelli, Doubly nonlinear evolution equations as convex minimization problems, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46 (2014), no.3, 1922-1945. 査読有
- [7] Goro Akagi, Doubly nonlinear parabolic equations involving variable exponents, *Discrete and Continuous*

Dynamical Systems Series S 7 (2014), no.1, 1-16. 査読有

- [8] Goro Akagi, Ryuji Kajikiya, Stability analysis of asymptotic profiles for fast diffusion equations, *The 4th MSJ-SI "Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations"*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 64 (2013) 183-191. 査読有
 - [9] Goro Akagi, A minimization approach to gradient flows of nonconvex energies, "Nonlinear Analysis and Interdisciplinary Sciences", *GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications*, Gakko-Tosho, vol.36, 2013, pp.1-16. 査読有
 - [10] Goro Akagi, Ryuji Kajikiya, Stability analysis of asymptotic profiles for sign-changing solutions to fast diffusion equations, *Manuscripta Mathematica* 141 (2013), no.3-4, 559-587. 査読有
- [学会発表](計 10 件)
- (1) Goro Akagi, Local solvability of a fully nonlinear parabolic equation with strong irreversibility, *Special Materials in Complex Systems - SMaCS 2015 INdAM Workshop*, ローマ(イタリア) 2015年5月20日
 - (2) 赤木剛朗, Stability of non-isolated asymptotic profiles for fast diffusion, 日本数学会 2014 年度年会、数方程式論分科会、明治大学(東京都) 2015年3月22日
 - (3) 赤木剛朗, Giulio Schimperna, Doubly nonlinear evolution equations in variable exponent Lebesgue spaces, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会、実関数論分科会、広島大学(広島県) 2014

年 9 月 22 日

(4) Goro Akagi, On a variational approach to stability analysis of asymptotic profiles for nonlinear diffusion, Souel ICM 2014 Satellite Conference on Variational Methods for Nonlinear Elliptic PDEs, KAIST, 大田(韓国) 2014 年 8 月 6 日

(5) Goro Akagi, Some fully nonlinear parabolic equation and unidirectional evolution, SS86, The 10th International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, マドリッド(スペイン) 2014 年 7 月 9 日

(6) Goro Akagi, On some diffusion equation with strong irreversibility, “Nonlinear Phenomena in Biology, Physics and Mechanics”, Helmholtz Zentrum München, ミュンヘン(ドイツ) 2014 年 3 月 5 日

(7) 赤木剛朗、非線形拡散方程式の解の漸近挙動、日本数学会 2013 年度秋季総合分科会、関数方程式論分科会、特別講演、愛媛大学(愛媛県) 2013 年 9 月 27 日

(8) Goro Akagi, On some nonlinear parabolic equation involving variable exponents, Workshop “DIMO-2013” Diffuse Interface Models, Grand Hotel Bellavista, レビコ(イタリア) 2013 年 9 月 11 日

(9) Goro Akagi, Diffusion equation with strong irreversibility, 3rd Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Tokyo Institute of Technology (東京都) 2013 年 9 月 3 日

(10) Goro Akagi, On an irreversible diffusion equation, Recent Advances in Partial Differential Equations and Applications, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di

Milano, ミラノ(イタリア) 2013 年 6 月 17 日

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

[その他]

○主催した国際会議のスペシャルセッション
Special Session “SS91: Variational methods for evolution equations” (U. Stefanelli 氏と共催) The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications、マドリッド(スペイン)2014年 7月7~11日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

赤木 剛朗(Goro Akagi)

神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授

研究者番号: 60360202

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

白川 健(Ken Shirakawa)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号: 50349809

上田 好寛(Yoshihiro Ueda)

神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授

研究者番号: 50534856

石渡 哲哉(Tetsuya Ishiwata)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号: 50334917

竹内 慎吾(Shingo Takeuchi)

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号: 00333021