

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 2 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400166

研究課題名(和文) 磁場散乱のレゾナンスにみるアハラノフ・ボーム効果

研究課題名(英文) Aharonov-Bohm effect in resonances for magnetic scattering

## 研究代表者

田村 英男 (TAMURA, Hideo)

岡山大学・自然科学研究科・名誉教授

研究者番号：30022734

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、2次元の簡単な散乱系のレゾナンスを通してアハラノフ・ボーム量子効果を追究した。散乱系は、4つの散乱物(2つの障害物と2つの有界な台をもつポテンシャル)から成り、障害物が2つのポテンシャルの台の間に位置し、磁場を完全に遮蔽している量子系を研究対象とした。磁場は、古典粒子の運動に関与しないが、量子力学にしたがう粒子は、障害物の外部で消滅しないベクトルポテンシャルからの影響を受ける。散乱物の間の補足現象によって、レゾナンスが実軸近傍に生成されるが、その位置に磁束のみならず障害物の位置が関わることを示した。

研究成果の概要(英文)：We have studied the Aharonov-Bohm quantum effect in resonances through a simple scattering system in two dimensions. The scattering system consists of four scatterers, two obstacles and two scalar potentials with compact supports, where the obstacles are placed between two supports and shield completely the support of magnetic fields. The field does not influence particles from a classical mechanical point of view, but quantum particles are influenced by the corresponding vector potential which does not necessarily vanish outside the obstacles. We have shown that the resonances are generated near the real axis by the trapping phenomenon between the scatterers and that the location depends on the location of the obstacles as well as on the magnetic fluxes.

研究分野：数学解析

キーワード：スペクトル理論 散乱理論 シュレディンガー作用素 磁場散乱 アハラノフ・ボーム効果 レゾナンス  
スペクトル漸近解析

## 1. 研究開始当初の背景

量子力学が提供する数学の問題は広く深くそして豊かである。その研究対象であるミクロな物理現象において、古典力学的な視点から説明できない注目すべき現象がしばしば生じる。このような自然現象は量子効果とよばれ、ひとつひとつが数学解析の格好の題材を提供している。代表者は、40年余年間に渡り、その基礎方程式であるシュレディンガー方程式に対するスペクトル理論と散乱問題の数学解析の研究に従事してきた。とくに、固有値および散乱現象に現れる種々の物理量の漸近性 (spectral asymptotics) を主要な研究課題としてきた。例を挙げれば、プランク定数  $h$  に相当する微小媒介変数の極限 ( $h \rightarrow 0$ ) をとることによって古典力学との関係をみる準古典近似問題、高エネルギーおよび低エネルギー領域での固有値の漸近分布 (Weyl 公式とよばれる) あるいは古典粒子の捕捉現象によって実軸近傍に生成されるレゾナンスの分布などが中核を占める課題である。これらの研究課題においては、偏微分方程式論、作用素論、数理物理からの問題意識が交錯し、その研究方法も多岐にわたっている。得られた研究成果は、ラプラス作用素のスペクトル理論を介して、確率論、微分幾何学、整数論などの諸分野と多くの接点を有し、スペクトル理論は数学のひとつの大きな研究分野を形成している。2年毎に開催される国際的研究集会 QMath (Quantum Mathematics) に加え、Euler 研究所、Luminy 研究所 (マルセイユ)、Mittag-Leffler 研究所および Lebesgue 研究所 (レンヌ大学) などで開催されているワークショップにおいてスペクトル理論関連の研究課題が採択され、ヨーロッパの諸外国では活発な研究が展開され、多くの著しい成果が得られている。最近では、磁場に関わるスペクトル理論が重要な研究テーマのひとつ

つになっている。しかし、国内においては、この分野に従事する研究者は決して多いとは言えず、とくに 30 歳代の若い研究者の層が薄いのは残念である。

## 2. 研究の目的

本研究が最も力を注いだ量子効果は、アハラノフ・ボーム効果である。量子力学に従う粒子が磁場の中を運動するとき、磁場のみならず、それを生成するベクトルポテンシャル自身もその運動に関与する。量子力学の根幹に関するこの現象は、アハラノフ・ボーム効果、通称 AB 効果とよばれている。スペクトル漸近解析を駆使し、2次元磁場の散乱系のレゾナンスを考察した。レゾナンス問題は、数学的散乱理論の現在を主導している中心的な研究課題で、精力的な研究活動が欧米において展開されているが、本研究が行った「磁場散乱のレゾナンスにみる AB 効果」の課題は、他に類を見ない独自の試みである。

本研究が対象とした散乱系は、2つの障害物とコンパクトな台をもつ2つのポテンシャルからなり、障害物は互いに離れた2つの台の間に位置し、磁場を完全に遮蔽している散乱系におけるレゾナンス問題を解析した。2つのポテンシャルの台の間で補足される軌道によって複素平面の正の実軸近傍に生成されるレゾナンスの位置に障害物によって完全に遮蔽されている磁場が AB 効果を通していかに関与するかを解明することを目的とした。研究対象とする散乱系は、量子が有する波動性と粒子性がともに顕在する簡単かつ重要な量子系である。波動性は、磁場を生成するベクトルポテンシャルによる AB 効果を通して波動関数の位相変化に現れ、一方、粒子性は、捕捉現象によって記述される。

### 3. 研究の方法

研究目的の課題を達成するアイデアの骨格はすでに完成していた。複数個のソレノイド磁場散乱のレゾナンス問題における克服すべき難しさは、磁場の中心間で生じる捕捉現象と磁場を生成するベクトルポテンシャルが及ぼす波動関数の位相変化(AB効果)である。方針は、次に述べる2段階の手順を踏んで為された:

[1] 単一ソレノイド磁場による散乱系は可解モデルとして知られている。そのグリーン関数(レゾルベント核)は、ベッセル関数を用いて、複素積分表示ができる。この積分表示に最急降下法を駆使し、グリーン関数の前方方向に沿った特異な漸近挙動を詳細に解析する。AB効果に起因する位相変化は、この挙動から導出することが可能である。

[2] 複数個のソレノイド磁場による散乱系のグリーン関数は、単一磁場のグリーン関数から構成する。磁場の中心間で生じる捕捉現象は、数学的には単一磁場のグリーン関数の反復積分として表現されるが、下半平面にスペクトル(エネルギー)変数を有するグリーン関数は、無限遠で指数的に増大し、その反復積分は一般には発散する。この困難は、実数変数を複素変数に変数変換(complex scaling method)し、指数増大を指数減衰に変化させることによって克服できる。

個人で行う理論研究のため、同じ分野の研究者と課題について討論を深め、最新の研究成果について情報を収集することが研究目的を達成するために不可欠である。そのような活動の場として次のセミナー、研究集会を活用し、その参加経費に科学研究費は使用された:

- ・作用素作用論セミナー(数理解析研究所)
- ・スペクトル理論セミナー(学習院大学)
- ・夏の作用素論シンポジウム

- ・研究集会「数理解析と微分方程式」
- ・研究集会「超局所解析と古典解析」

### 4. 研究成果

初年度の25年度から、論文の作成を開始した。レゾナンスの位置は、障害物によって磁場を遮蔽したにもかかわらず、磁束に関係することを示し、AB効果の関与を明らかにした。加えて、その位置は、4つの散乱物の間の距離の比にも関係し、磁場を遮蔽する障害物の配置にも依存することを示した。例えば、ポテンシャルの台をつなぐ直線に対して、障害物が水平に、あるいは垂直に配置される場合とでは、レゾナンスの位置が微妙に異なることを明らかにした。得られた結果の一部は論文①で公表し、関連する2篇の論文は現在掲載予定の段階にある。

次年度の26年度は、論文③で開発されたcomplex scalingの手法を精密化し、少数個(3および4個)のソレノイド磁場による散乱系のレゾナンスについてAB効果を解析した。得られた結果は論文②にレジュメ形式で公表した。

最終年度の27年度は、レジュメ形式で公表した結果を本格的な論文として完成させ、現在国際学術誌に投稿中の段階にある。また、次年度の研究課題の準備として、2次元空間の3体のフェルミ粒子系に対するsuper Efimov効果の研究に着手した。この量子効果は3次元空間の3体系に対するEfimov効果に相当し、物理学者達によって「くりこみ群の手法」を用いて最近発見された現象であり、多体系スペクトル理論において注目を集めている量子現象のひとつである。

最後に、科学研究費が関係した研究分担者による研究活動について報告する。

- ・岩塚は、峯とともに数理解析研究所での

作用素論セミナーと夏の作用素論シンポジウムを主催した。また、26年度には、障害物による散乱のレゾナンス問題について優れた実績を有するナント大学の Vodev 教授を招聘しセミナーで講演を行った。

・ 寛は、磁場を有するシュレディンガー方程式の解の構造について対照空間上での幾何解析を行った。また、27年度には数理解析研究所の研究集会（スペクトル理論とその周辺）を主催した。

・ 一瀬は、27年度に2名の外国人研究者を交え、数理解析研究所において共同研究（作用素ノルム Trotter・加藤積公式の研究）を主催した。また、量子力学における観測問題に深く関わる量子ゼノン効果の数学解析（ゼノン積とよばれる作用素の指数積の強収束問題）に精力的な活動を展開している。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① H. Tamura, Asymptotic properties in forward directions of resolvent kernels of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, *Mathematical Journal of Okayama University*, 58 (2016), 1-39 (査読有)

URL (<http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou>)

② H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances for scattering by three solenoids, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 91 (2015), 45-49 (査読有)

DOI 10.3792/pjaa.91.45

③ H. Tamura and I. Alexandrova, Resonances in scattering by two magnetic fields at large separation and a complex

scaling method, *Advances in Mathematics*, 256 (2014), 398-448 (査読有)

DOI 10.1016/j.aim.2014.01.022

〔学会発表〕（計 11 件）

① 田村英男, 2次元3体系の super Efimov 効果について, 2015年11月, 松本作用素論セミナー, 東横イン松本駅前本町会議室, 松本市

② 田村英男, 2次元3体系の super Efimov 効果について (あるプレプリントから), 2015年11月, 第26回数理解析と微分方程式, ニューサンピア姫路ゆめさき, 姫路市

③ 田村英男, ソレノイド磁場による散乱のレゾナンスからクーロン散乱へ, 2015年9月, RIMS 共同研究「共鳴極と測地線の幾何の再解釈と新展開」, 数理解析研究所, 京都市

④ H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances for magnetic scattering by three solenoids, 2015年5月, Workshop "Magnetic fields and semi-classical analysis", Henri Lebesgue center of mathematics, Rennes (France)

⑤ 田村英男, 3個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスと AB 効果, 2014年12月, 第21回超局所解析と古典解析, 松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば, 長崎市

⑥ 田村英男, 3個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスにみる AB 効果, 2014年11月, 第25回数理解析と微分方程式, 四季の湯強羅静雲荘, 神奈川県箱根

⑦ 田村英男, 複数個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスにみる AB 効果, 2014年6月, 作用素論セミナー, 数理解析研究所, 京都市

⑧ 田村英男, 複数個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスにみる AB 効果, 2014

年4月, 学習院大学スペクトル理論セミナー,  
学習院大学

⑨ 田村英男, 複数個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスにみる AB 効果, 2014年3月, 松本作用素論セミナー, 東横イン松本駅前本町会議室, 松本市

⑩ H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, 2013年10月, Analysis seminar, Nantes University, Nantes (France)

⑪ H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, 2013年7月, Plenary lecture, 6<sup>th</sup> Pacific RIM conference on Mathematics 2013, 札幌市

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田村 英男 (TAMURA, Hideo)  
岡山大学・自然科学研究科・特命教授  
研究者番号: 30022734

### (2) 研究分担者

笥 知之 (KAKEHI, Tomoyuki)  
岡山大学・自然科学研究科・教授  
研究者番号: 70231248

岩塚 明 (IWATSUKA, Akira)  
京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授  
研究者番号: 40184890

一瀬 孝 (ICHINOSE, Takashi)  
金沢大学・名誉教授  
研究者番号: 20024044

(平成27年度は研究協力者)

### (3) 連携研究者

峯 拓矢 (MINE, Takuya)  
京都工芸繊維大学・基盤科学系・准教授  
研究者番号: 90378597

藤家 雪朗 (FUJIIE, Seturo)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号: 00238536

谷島 賢二 (YAJIMA, Kenji)  
学習院大学・理学部・教授  
研究者番号: 80011758

中村 周 (NAKAMURA, Shu)  
東京大学・数理科学研究科・教授  
研究者番号: 50183520