様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　 6 月 13 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１７０

研究課題名（和文）レゾルベントの漸近解析による時間依存型境界値逆問題の展開

研究課題名（英文）Development for inverse boundary value problems using asymptotic analysis of resolvents

研究代表者

川下　美潮（Kawashita, Mishio）

広島大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：８０２１４６３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：熱方程式の境界値逆問題では「指示関数」と呼ばれる関数の漸近挙動の解析から空洞や介在物の情報を引き出すことになる。この研究ではレゾルベントの漸近挙動の解析を経由してこの情報を引き出すことを目標にした。まず、内部が狭い意味で凸な空洞の場合に積分核の詳細な評価を導くことにより、一つの観測データのみからこの空洞を含む領域を導くことができた。この結果は空洞が複数個の狭い意味で凸なものからなる場合に拡張できた。この問題設定は一次元の場合の逆問題の自然な拡張になっている。さらに、指示関数の漸近挙動とレゾルベントの漸近挙動とには密接な関係があることがこの研究を通じて明らかになった。

研究成果の概要（英文）：In the boundary value inverse problem of a heat equation, the information on cavities or inclusions are deduced from the analysis of the asymptotic behavior of the function called an "indicator function." The aim of this research is to obtain this information via analysis of the asymptotic behavior of the resolvents. First, a domain including this cave is given only from one observational data by showing detailed estimation of an integral kernel for a strictly convex cave. This result is extended to the case of several strictly convex cavities. This problem setup is natural extension of the inverse problem for one-dimensional case. Furthermore, through this research, it became clear that there is a close relation to the asymptotic behavior of indicator functions and resolvents.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：レゾルベント　境界値逆問題　囲い込み法　漸近展開　ポテンシャル論

１．研究開始当初の背景

本研究はもともと池畠優氏(群馬大学(本研究開始当時、現広島大学大学院工学研究院教授))との共同研究として始めた研究を発展させようとしたものである。研究課題は熱方程式に対する境界値逆問題について「囲い込み法(enclosure method)」と呼ばれている方法を用いて考察を行うというものである。

本研究代表者はこの研究に着手する前に弾性体の表面を伝わる波(表面波)自身が境界の形状変化により散乱されるという状況を反映した散乱理論の構成を行った上、その過程で得られた散乱状態を特徴づける諸量についての解析を行ってきた。この研究と「囲い込み法(enclosure method)」による熱方程式の境界値逆問題に対する研究は一見すると直接のつながりがないように思われるかも知れない。しかしこれらは「漸近解析」の視点から見れば、深くつながっていることが当時予想され、この予想が研究推進の原動力であった。実際、研究代表者は池畠優氏との共同研究で、熱方程式の境界値逆問題を「囲い込み法(enclosure method)」により考察したが、その際、漸近パラメータを含んだ境界値問題の解からパラメータを大きくすることにより必要な情報を抽出することができるかどうかが問題解決のための核心になった。そのとき本質的に用いたのが「漸近解析」であった。

この点に着目し、平成22年度～25年度の期間に「漸近解析による逆問題の展開ー散乱問題の視点からー」との研究題目で研究を行った（課題番号は22540194であった）。当時の研究目標は、次の境界値逆問題と散乱逆問題について考察することであった。

(1) 熱方程式の境界値逆問題を「囲い込み法」の視点から解析する。

(2) 弾性表面波に対する定常問題に関する散乱逆問題を解析する。

上の課題(1)は池畠氏との共同研究であるが、そこで扱った逆問題は熱方程式に対する境界値逆問題の一種で、その解析の本質は上で述べたように漸近パラメータを大きくしたときに解の挙動がどうなるかについて調べることであった。その点において本研究代表者がこれまで主に研究してきた散乱問題における漸近解析が本質的に有効であった。この研究は本研究開始のための大きな動機づけとなった。

上記の(1)における研究対象についてより詳しく述べる。熱方程式に対する境界値逆問題とは、境界における温度と熱流(温度勾配)の組（微分方程式論の用語で言えば、それぞれDirichlet境界値とNeumann境界値に対応する）が観測データとして与えられ、この組から内部情報を知る手順について考えるというのが問題になる。一般にはそのために必要となる観測データの個数は少ない方がよい。観測データが無限個必要(すなわち無限回の観測を行うことを許す)か、それとも有限個で済むか、この違いは実際に観測することを考えれば明らかである。以下無限個の観測データが必要なとき「無限回観測」、そうでないとき「有限回観測」、一度だけでよいとき「一回観測」という。

本研究代表者は池畠優氏と共同で無限回観測で、内部構造が穴(境界はある程度なめらか)のみであることが事前に分かっている場合に穴の凸包を知ることができることを示した。この結果を踏まえて主に次の項目について考察した。

- 介在物などの穴以外の内部構造について、無限回観測を許したときに穴の場合と同様のことができるか。
- 無限回観測を許すのを認めると観測データの種類をいろいろ変えることができる。この変化を利用して凸包以外の内部の情報を得ることができるか。

介在物の場合は穴の場合とは使う恒等式が異なり、新たな考察が必要になった。考察の主要な部分は、漸近パラメータ付きの境界値問題の近似解から得られた境界積分の下からの評価を行うことにある。このパラメータつきの境界積分の評価が穴の場合よりは少し複雑になったが、無限回観測を許しているので、少し工夫することにより扱うことが出来、結果として、穴の場合と同様、囲い込み法が有効であることを確認した。さらに、凸包以外の情報も得られることもわかった。

次の課題は一回観測のときにはどうなるかということであった。一回観測のときには大きく分けて２通りの定式化が考えられる。そのうちの一つは無限回観測のときと同じ発想を一回観測の場合にも適用することから導かれる。このときは穴や介在物と外側の境界との距離が求まることを確認した。この量は囲い込み法では初めて捉えられたものである。平成 22 年度に行った無限回観測のときの研究と一回観測のときの考察結果とを比較することにより、この結果が本質的に新しいことを含んでいることが確認できた。定式化の発想が似ていることから、途中までは無限回観測、一回観測に共通した議論にまとめることができ、ともにパラメータ付き楕円型問題の解の漸近挙動を調べることに帰着されることが分かった。無限回観測のときとの違いは、選べる解が外側の境界のみをおいたときの境界値問題の解しか使えないということにある。この解はポテンシャル論を用いて構成し、その表示から漸近挙動を導くことにより結論を得た。この証明から「囲い込み法」の手順により観測データから「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を導

き出すことができることが明らかになった。この「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ている」というのは重要な知見で、この見解が本当に正しいのかどうかについて調べることが大きな課題となった。

一般に、境界値逆問題の研究では、上で述べた通り観測データに関して

（i）無限回観測（無限個の観測データを用いることを認める設定）の場合、

（ii）一回観測（一回の観測しか許さない設定）であるが、無限回観測のときと同じ発想、定式化を適用した設定の場合、

の二通りの場合についてこれまで扱ってきた。ところが、一回観測では(ii)における無限回観測のときとは異なる発想による設定も考えられる。この新たな設定の場合に対する囲い込み法の設定についての考察が、最後に残った課題となった。上記(i)、(ii)では、内部構造が穴、または介在物(境界はある程度なめらか)のみであることが事前に分かっている場合の両方について調べられていたが、この場合は(i)、(ii)のときよりも制約が大きく、内部構造が穴のみで、穴の形は強い意味で凸であるという仮定のもとで考察するのが妥当であると判断し、研究を行っていた。

これが本研究課題を申請した時点での到達点である。その後、研究が進み、本研究開始当時には上で述べた穴の形は強い意味で凸であるという仮定のもとでこれまで明らかにされてきた「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ているという見解は正しいことに確信が持てるようになった。そこで、この見解が正しいことを証明することが研究を開始する時点での大きな目標となった。

２．研究の目的

「境界値逆問題」とは、外部の境界を既知とし、その境界上における観測データ（熱方程式のときは境界上の温度と熱流）から内部の情報（例えば内部にある空洞の形など）を得る方法について考察するという問題のことを指す。考察対象が熱現象だと熱方程式、波動現象だと波動方程式を基礎方程式として同様の定式化が考えられる。

境界値逆問題に限らず、微分方程式の逆問題における研究テーマは主に次の３つに分けられる。

一意性：内部の構造が観測データから一意に決まるかどうかについて調べること。

安定性：観測データが近いときは内部の状態も近い、すなわち、似た状態になっているかどうかについて調べること。

再構成：内部の様子、例えば空洞や介在物(内部に入っている異質な物質のこと、inclusion ともいう)の位置や形状について具体的に知る手順を与えること。

これまで本研究代表者が考察してきた熱方程式に対する境界値逆問題を囲い込み法により考察するという問題は上の分類によれば、「再構成」に関連した問題になる。研究開始当時、我々の研究を通じて、空洞や介在物の情報は熱方程式を時間について Laplace 変換して得られる「レゾルベント」のスペクトルパラメータを大きくしたときの漸近挙動と深い関係があること徐々に解明されつつあった。その研究過程で展開された議論を振り返ると、次の(1)～(3)の順序で境界値逆問題に取り組むのが有効であると考えるようになった。

(1) 境界値逆問題の考察に必要となるレゾルベントの漸近解析の問題を抽出する。

(2) (1)で得られたレゾルベントの漸近解析の問題について解析する。

(3) (2)の結果から境界値逆問題について何が分かるかを明らかにする。

より具体的には、次の 3 つの点について考察することを考えた。

１．レゾルベントの漸近挙動が境界値逆問題に関係する理由を明らかにする。

２．レゾルベントの漸近挙動自体に対する新たな解析の実行を適宜行う。

３．１，２の解析を通じて境界値逆問題について新たな知見を与える。

このようにレゾルベントの漸近挙動が関係する理由を微分方程式論の視点から明らかにすることが目標である。また適宜レゾルベントの漸近解析を行い、境界値逆問題について新たな知見を与えることも目指した。

３．研究の方法

本研究は熱方程式の境界値逆問題を囲い込み法により考察するが、まず、なぜ「囲い込み法」を採用するかについて述べる。

境界値逆問題に対しては「囲い込み法」を初めとする様々な再構成の手続きが提唱されてきた。そのほとんどは、内部の情報、例えば空洞や介在物の形などを完全に特定できる方法である。しかし、その代わりに、内部の情報を引き出すために複雑な手続きが必要な上、理論的には観測を無限回行って初めて得られる観測データを用いないといけないという設定になっている（現実問題に対する対応としては、十分な回数を行って打ち切るとよい）。さらに囲い込み法以外の再構成手続き同士には互いに関係がある。実際、中村玄氏ら(Nakamura, Honda, Potthast and Sini)により定常問題の境界値逆問題に対してこれまでに提唱された「探針法(probe method)」、「No-response test」、「Linear sampling method」および「Singular source method」の間の関係が明らかにされており、現在では数学的にはほぼ同値であると見なされている。その研究成果においても「囲い込み法」はこれらの方法とは違うものと思われており、それに限定して考察することは逆問題全体から見て意味があると考えられる。

囲い込み法の特徴は、再構成の手続きが単純であるということにある。その代わり、内部の情報のすべてが得られる訳ではないという弱点もある。囲い込み法は他の再構成の手順とは異なっているのでこのような性質は妥当である。むしろ、定式化が単純な利点を生かせば、今後も新たな発展があると思われる。さらに、囲い込み法による設定をうまく導入すれば、必要かつ重要な内部情報を比較的容易に得ることができると期待される。さらに、他の定式化とは異なった範疇に入る再構成手順を研究するというのは大きな特色である。

囲い込み法による境界値逆問題の展開における課題として下記のものがある。

① 一回観測(II)の考察の過程で現れたレゾルベントの漸近挙動についての考察
② 空洞に対する一回観測(II)についてのより詳しい解析の実行
③ 空洞と介在物が入り混じった場合の境界値逆問題についての考察
④ その他の境界値逆問題の設定に対するレゾルベントによる解析の有効性ついての考察
⑤ 介在物に対する一回観測(II)についての考察

これらの課題のうち、①についてはほぼ満足なものが得られていると考えられるので、②~⑤に対する考察が主な課題となる。

問題の本質は、囲い込み法により問題設定を行った際に現れるレゾルベントの漸近解析の実行にある。この課題を下記のように細分化した上で問題設定を行い、研究に取り組むことにした。

(A) 境界値逆問題についての知見を得るために必要となるレゾルベントの漸近解析を抽出する。
(B) (A)で得たレゾルベントの漸近解析に関する問題を精査し、既存の結果等を調べ、問題の本質を見定める。
(C) レゾルベントの漸近解析について新たに解析しなければならない部分を実行する。また、より良い証明方法や汎用性がある議論の発見を目指し、考察を行う。

４．研究成果

熱方程式の境界値逆問題に関する考察では「指示関数」と呼ばれる関数の漸近挙動の解析から空洞や介在物の情報を引き出すことになる。そのためにレゾルベントの漸近挙動が必要になる。これが本研究の基本的な考え方であることはこれまでに述べてきた通りである。

この方針に則りレゾルベントの漸近挙動を調べ、どのようにして空洞や介在物の情報を引き出せるかについて研究した。本研究初年度の平成25年度は「一回観測（II)の考察の過程で現れたレゾルベントの漸近挙動についての考察」について調べた。「一回観測（II)」とは指示関数を三次元の全領域におけるレゾルベントを表す微分方程式の基本解を使って定めるという考え方に従った定式化のことを指す。この「一回観測（II)」については、まずはこれまでの研究で空洞が狭い意味で凸のときに限定して考察を進めた。

この研究の特徴の一つは、レゾルベントの解析を行うために古典的なポテンシャル論を用いることにある。レゾルベントの漸近解析を詳細に行うためには、何らかの方法でレゾルベントを構成しないといけないが、この部分はポテンシャル論を用いる。この方法によりレゾルベントの構成を行うだけなら容易であるが、問題は「一回観測（II)」において求められている情報が引き出せる様な解析ができるかどうかにある。

古典的なポテンシャル論によれば、境界値問題の解は全空間のときの基本解から定まる関数を積分核に持つ境界上の積分方程式を解くことと同値になる。そのため、解かなければいけない積分方程式の積分核には指数減衰する項が含まれる。そのため反復核積分の級数が収束することを示すだけなら容易である。問題はその極限も元の積分核と同じ指数減衰度を保っていることを示すことである。通常の方法では、指数減衰度を保つようにすると反復核積分の級数が収束せず、この部分には相応の工夫が必要になる。幸い空洞が狭い意味で凸なら、上に述べた反復核積分の級数が収束し、さらに、その極限も元の積分核と同じ指数減衰度以下になるという評価を得ることができる。空洞が狭い意味で凸のときに限定するのはそのためである。

本研究課題に着手する頃には狭い意味で凸のときには上の反復積分核の評価についてはほぼわかっていた。そこで、この評価を用いて「一回観測（II)」に対する指示関数の漸近評価を導くことにより、指示関数の漸近挙動を得ることが問題になった。

「一回観測（II)」では全区間での基本解を用いる。その源泉を与える点を P とする。この点 P は外側の境界の外部に任意に選ぶことができ、指示関数は点 P の関数になる。この点 P を固定したとき、外部の境界上の点 Y と空洞の境界上の点 X を任意に選んだとき、線分 PX と XY の長さの和 PX+XY の最小値 L(P) を指示関数に対する漸近挙動から求めることが出来る。この事実が「一回観測（II)」のときに得られた結論である。

この L(P)が分かれば、P を動かして考えることにより空洞が存在すべき場所を取り囲む領域を求めることが出来る（すなわち、空洞はこの領域の内部にある)。このように、空洞の大きさを上から評価することができる。残念ながら、この方法で空洞を特定できるかどうかは分からない。しかしながら、「一回観測（II)」に当たる定式化ではこのような結果は我々の知る限り見当たらない。

この方法の問題点は、L(P)を与える点 X と Y を結ぶ直線が点 P を通る、すなわち 3 点 P, X, Y が直線を作ることがあることである。この場合、L(P)は点 P と外部の境界との距離を与えることに注意すれば、意味のない情報を得た可能性があることが分かるので、実際には問題はあまり起きないと思われる。このときは内部の空洞は点 P と外部の境界との距離（すなわち L(P)のこと）を与える点 Q の近くにあることが予想される。そこでこの点 Q の近くに新たに点 P をおき直し、改めて L(P)を計算することにより意味のある情報を引き出すことが可能となる。出来ればこの手順に従って空洞をどの程度回復できるのかについて、数値解析などを用いて調べてみる必要があるとは思うが、この問題については、何も手をつけていない。今後の課題の一つである。

なお、外部境界の形状によっては、L(P)を与える点 X と Y を結ぶ直線は点 P を通らないことが分かる。例えば、外部境界が球面であればこの性質を満たすことが分かっている。

L(P)を導くためには指示関数の漸近挙動を求める必要があるが、最終的には空洞の境界上における Laplace 積分の漸近挙動を調べることに帰着される。まずは、逆問題としての意味を考えるために、いわゆる非退化条件を用いて漸近挙動を引き出せるような状況下で議論を行った。この問題の場合は漸近挙動の下からの評価を求めることが問題になるので、非退化性の仮定がなくても解析可能である。この考察を平成 26 年度に行った。この部分は過去に研究代表者が行った Rayleigh 波に対する散乱問題において現れた振動積分の評価と類似した問題で、そのときの考え方を踏襲することにより、L(P)を非退化条件を課すことなく指示関数から導くことができことを示すことができた。

本研究における考察はパラメータつきの楕円型境界値問題の解をポテンシャル論を用いて表示し、その形を最大限利用することにある。一方、パラメータつきの楕円型境界値問題の解については Varadhan(1967)に始まる古典的なレゾルベントの漸近挙動の問題など、古くから多くの研究がある。この逆問題の考察をしているうちに指示関数の漸近挙動は、Varadhan によるレゾルベントの漸近挙動の問題と関連があることが分かった。そこで、逆に、本研究で用いた手法を古典的なレゾルベントの漸近挙動の問題に適応し、内側の境界からデータが出ない場合のレゾルベントの漸近挙動についての考察を行うことにした。特に、内側の境界からデータが出ない場合が我々が扱っている逆問題と密接な関係があるが、それぞれの問題設定の違いにより、類似点と相違点があることが明らかになった。この考察を行ったのは上で述べた L(P)を与える点 X と Y と点 P が直線を作る場合がなぜ起こるかということにある。この点については数学的な定理としてはうまくまとまらないが、一口で言えば、指示関数がレゾルベントと基本解の積の積分になっているという構造から、上で述べた直線が L(P)の候補として残ってしまうことがあるというのがその理由であると考えられる。

最終年度はこれまで調べていた空洞が狭い意味で凸なとき対する一回観測(II)についての解析手法を元にして、より複雑な場合である空洞が複数の狭い意味で凸なものからなる場合について研究を行った。これまでと同様、パラメータつきの楕円型境界値問題の解をポテンシャル論を用いて表示し、その形を最大限に利用することを通じて「指示関数」の漸近挙動を調べ、必要な情報を取り出すという手法で研究した。その結果、外部の境界（すなわち、逆問題の観測データーを得る部分）の形状が、漸近挙動を調べるために導入する関数の特異点（この点を考えている物体の外に仮想的に一つ取ることにより「指示関数」を導入している）を中心とする球の一部になっていないという状況下では、空洞が凸な場合と同じ結論になることが証明できた。例えば、外部の境界が球ならこの状況に合致することがすぐに分かる。また、中心が異なる 3 つの球がありそれらの中心が直線上にないときはこれらの球の共通部分は無いかもしくは 2 点になるかのいずれか一方のみが起こることに注意すると、指示関数を定める際の特異点を取り替えれば、ここで得られた結論を適用できることが分かる。このように、空洞が複数の狭い意味で凸なものからなる場合は外部の境界に条件が付くが、その条件はとても緩やかなものであり、この結果はかなりの部分で適用可能となり、応用範囲は広いものと思われる。

最後に、なぜ、空洞が複数の狭い意味で凸なものからなる場合はうまく指示関数から L(P)を取り出すことができたかについて述べる。L(P)を与える点 X, Y (それぞれ空洞の境界、外部の境界上にある)が点 P と合わせて一直線にならないときは、X がない空洞上の点からの距離は X がある空洞からの寄与に比べて必ず長くなる。この長さに応じてレゾルベントは指数減衰するので、結局、X がある空洞しかない状況と同じになる。このことを具体的に評価していく必要があるが、それはこれまでの研究成果より可能である。一方、一直線になるときは、全ての場合を扱わなければいけなくなり、評価がうまくいかない。同様の理由で、一般の形状の場合もうまくいかない。これらの状況を扱うには、反復核積分の収束について改めて議論を行う必要があり、問題はかなり難しいと思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① M. Kawashita,
Sufficient conditions on decay estimates of the local energy for dissipative wave equations in exterior domains and behavior of the total energy
Hokkaido Mathematical Journal 査読有
掲載決定(平成28年10月19日掲載決定通知受領).

② M. Ikehata and M. Kawashita,
An inverse problem for a three-dimensional heat equation in thermal imaging and the enclosure method,
Inverse problmes and Imaging, 査読有 8, No. 4 (2014), 1073-1116.

③ M. Ikehata and M. Kawashita,
Estimates of the integral kernels arising from inverse problems for a three-dimensional heat equation in thermal imaging, Kyoto J. Math.
査読有 54, No. 1 (2014) pp.1-50.

〔学会発表〕（計　6　件）

①　川下美潮　複数の凸な空洞をもつ領域上の熱方程式に対する囲い込み法 平成27年6月6日　ひこね解析セミナー　彦根勤労福祉会館

②　川下美潮　消散項付き波動方程式の解のエネルギー減衰について 平成26年12月12日 Seminar on Nonlinear Analysis at O-okayama 東京工業大学大岡山キャンパス

③　川下美潮　消散項付き波動方程式の解のエネルギー減衰について　信州大学偏微分方程式研究集会　平成26年6月13日　信州大学理学部A棟4階数理自然情報合同研究室

④　川下美潮　消散項付き波動方程式の解のエネルギー減衰について現象解析特別セミナー第５回 平成26年3月22日　茨城大学教育学部

⑤　川下美潮　Sufficient conditions for decaying properties of local energy for the dissipative wave equations　第6回 名古屋微分方程式研究集会　平成26年3月10日　名古屋大学多元数理研究科

⑥　川下美潮　Decaying properties of the total and local energies for the wave equations with dissipations 第31回九州における偏微分方程式研究集会 平成26年1月28日　福岡大学 メディカルホール

６．研究組織
(1)研究代表者
川下　美潮(KAWASHITA　MISHIO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80214633