

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400171

研究課題名(和文) Turing 型不安定化の包括的研究

研究課題名(英文) Unified Study of Turing type Instability

研究代表者

坂元 国望 (Sakamoto, Kunimochi)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40243547

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：従来型の Turing 不安定化メカニズムを二つの方向に拡張した。一つは、閉鎖系での2成分系から多成分系に拡張し、二つ目は、開放系(系の境界を通して物質が出入りする系)に対して、非従来型の Turing 不安定化メカニズムを発見した。非従来型の開放系に於ける Turing 不安定化においては、各成分の拡散係数が同じ場合にも定常不安定化と振動不安定化の二つのタイプの不安定化が、従来型よりも出現し易いことを見出した。また、不安定化の臨界状態が従来型のそれを非線形に変形した曲線であることを見出した。この曲線は考察下の領域と其の上のラプラス作用素のみで決定されることを証明した。

研究成果の概要(英文)：In this project, we have extended the conventional Turing instability mechanism in two directions. In one direction, the usual Turing mechanism for two component closed systems has been extended to multi-component closed systems. In the other direction, The Turing type mechanism has been extended to open systems, in which mass-transfer through the boundary of the system is present. In the Turing mechanisms for the non-conventional Turing instability, both steady and oscillatory instability occur even for systems with equal diffusivity, and in this case, the instability threshold is not a simple imaginary axis, but is a nonlinearly curved. The curve is determined solely by the domain under consideration and the Laplace operator on it.

研究分野：応用数学

キーワード： Turing 不安定化 境界上の相互作用 ステクロフ固有値 ディリクレ-ノイマン写像 拡散系 多変数系 Hopfモードの不安定化 臨界曲線

1. 研究開始当初の背景

(1) 1952年に発表された Turing の拡散誘導不安定化の理論は、形態形成の数学的な理論の基礎として数理科学全般、特に、発生生物学、表皮パターン形成、化学反応に於ける空間構造形成などに応用されてきた。1989年から1991年に掛けて、初めて化学反応系における Turing 機構を実証的に示す実験が相次いで報告され、その後、1990年代後半に掛けて魚の表皮パターン形成に於いても Turing 機構が関与していることを示す実験等も行われた。これらを契機として、その後、理論・実験の両面から、更に活発な研究が幅広い分野で展開されてきた。

(2) Turing 機構の数学的な面に関しては、系の境界条件は考慮しない全空間の場合と、全空間でない領域上で自然境界条件のもとでの理論的な解析が主流であった。境界条件を自然境界条件以外で設定で解析を行えば、Turing 機構に関する従来とは異なる数学的な現象が見出されるに違いないとの予見はあったが、実際にある程度の一般的な状況下でのそのような数学的研究は無い状況であった。

2. 研究の目的

(1) 従来の設定とは異なる状況：領域内部では拡散のみが occuri、相互作用は領域境界のみで行われている系に対して、Turing 不安定化と同様の機構が存在するか否かを探り、その詳細を明らかにすること。

(2) 細胞レベル・分子レベルの現象に於いては、関与する各因子の拡散速度はそれほど大幅な違いがないことは、実験的に知られている事実である。このような場合には、従来の Turing 不安定化理論が適用できない。拡散速度が同程度の場合にも、境界相互作用によって駆動される系では Turing 型の不安定化が起こり得るのか否かを解明すること。

(3) Turing 不安定化に対する従来の数学的な研究は、2成分系に関するものが主であった。例外は、Turing の原論文(1952年)において振動不安定化が起こり得る状況として触れられている。成分数が3以上の場合に従来型の拡散誘導不安定化の理論を拡張すること。

3. 研究の方法

(1) 領域内部の拡散効果と境界上でのフラックスの関係を記述する、いわゆる、ディリクレ-ノイマン写像を用いて、系全体の安定性の問題を境界上の系の安定性問題として捉え直すこと。

(2) ディリクレ-ノイマン写像の性質と領域の幾何的な情報や境界の連結成分の個数と関連付けること。

(3) 力学系的な視点から(1)と(2)で得られた情報を統合して、系のダイナミクスを記述すること。

4. 研究成果

(1) 領域内部で拡散のみ、領域境界で非対角的に相互作用する系に対しても、概ね、従来型の Turing 不安定化機構が一般化されることを見出した。即ち、従来設定に於ける活性因子・抑制因子に相当するものを、非従来の状況において同定し、活性因子の拡散速度が抑制因子のそれに比べて十分小さいならば、Turing 型の不安定化が生じることを見出した。同時に、従来型では起こらない、「拡散誘導安定化」、即ち、不安定な系が拡散効果によって安定化する状況の詳細を明らかにした。

(2) 従来設定で決して起こらない2成分系に於ける振動的な不安定化が、境界相互作用によって頻繁に起こることを証明した。

(3) 関与する因子の拡散速度が同じ場合でも、定常不安定化および振動不安定化が頻繁に起こることを証明した。その場合、不安定化の臨界が、従来型の複素平面上の虚軸ではなく、虚軸上で定義され実軸に値をとる区分的に解析的な関数のグラフとして表されることを示した。従来型の線形な臨界直線が非線

形の臨界曲線によって取って代わられることを見出したのである。さらに、この臨界曲線は系が定義されている空間領域にのみ依存することを示した。

(4) 自然境界条件を課した通常の反応拡散系において、成分数が3以上の場合に Turing 不安定化の理論を拡張するには、従来の活性化因子・抑制因子タイプの議論は直接的には適用出来ない。活性化因子・抑制因子という見方は、あくまでも、2成分系を想定しているので、成分数が3以上の系に対して、どのようにそれらの概念を拡張するのかについては、明確でなかった。本研究では、全体系を部分系とその相補的な系に分解し、活性化因子を不安定部分系と置き換え、その相補的部分系に抑制因子の役割を担わせることを指導原理として、3変数以上の反応拡散系にたいしても従来型の Turing 機構が機能することを示した。従来の2成分系との違いは、不安定部分系の相補部分系は抑制因子の用に安定化効果を持つ必要は必ずしも無く、不安定系であって Turing 機構は機能する事である。成分数が3以上であることにより、不安定部分系が2成分系の場合、その不安定生のタイプは3つに分類され、それぞれのタイプによって Turing 不安定化のタイプが、定常型、振動型、定常・振動共存型と2成分系では出現しない多彩な不安定化現象を生み出すことを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1. K. Sakamoto, Destabilization threshold curves for diffusion systems with equal diffusivity under non-diagonal flux boundary conditions, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B 21 (2016), pp. 641-654, doi:103934/dcds2016. 21. 641

査読有り、

2. A. Anma and K. Sakamoto, Destabilization of uniform steady states in linear diffusion systems with nonlinear boundary conditions, Advanced Studies in Pure Mathematics, 64 (2015), pp. 201 - 207, 査読有り

3. K. Sakamoto; Destabilization / Stabilization of Diffusion Systems by

Diffusion and Boundary Flux, 数理解析研究所講究録 1924 (2014), pp. 30 - 54 , 査読無し

4. A. Anma and K. Sakamoto, Turing type mechanisms for linear diffusion systems under nondiagonal Robin boundary conditions, SIAM Journal on Mathematical Analysis Volume 45, No. 6, pp. 3611 - 3628 (2013), 査読有り

[学会発表] (計9件)

1. K. Sakamoto, Diffusion in the bulk and non-diagonal flux on the boundary lead to Turing type instability, International Conference on Dynamics of Evolution Equations, 2016年3月22日, Marseille (France)

2. K. Sakamoto, Turing bifurcations in Diffusion Systems with Nonlinear Boundary Interactions, Pattern Formation and Dynamics of Solution Structure, 2015年6月27日, 北海道大学理学研究科 (北海道, 札幌市)

3. K. Sakamoto, Destabilization of Turing-type under equal diffusivity, Nonlinear Dynamics with Application to biology, 2014年5月29日, Hsincho (Taiwan)

4. K. Sakamoto, Generalized Steklov Eigenvalues for the Laplacian, Modern Problems in Mathematical Physics, 2014年11月28日, Moscow (Russia)

5. K. Sakamoto, Diffusion Equations under Dynamic Boundary Conditions, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月8日, Madrid (Spain)

6. K. Sakamoto, Hopf destabilization of nontrivial spatial modes in diffusion systems with equal diffusion rates, SNP2013, 2014年1月30日, (京都府, 京都市)

7. K. Sakamoto, Dirichlet-to-Neumann Map:
A useful tool for studying patterns and
interfaces, 反応拡散系のパターンダイナミ
クス, 2013年11月29日, (富山県、富山市)

8. K. Sakamoto, Destabilization
Stabilization of Diffusion Systems by
Diffusion and Boundary Flux, 非線形現象
に現れるパターン形成の数理解析, 2013年
11月1日 (京都府, 京都市)

9. K. Sakamoto, Steklov eigenvalue
problems arising in diffusion systems
under dynamic boundary conditions, NLPDE
Seminar, 2013年6月21日 (京都府, 京都
市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂元 国望 (Sakamoto Kunimochi)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 40243547