2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１７５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００１７２

研究課題名（和文）熱弾性と熱弾塑性の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical Analysis for Thermoelasticity and Thermoelastoplasticity

研究代表者
吉川　周二（Yoshikawa, Shuji）

大分大学・理工学部・教授

研究者番号：８０４３５４６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：熱弾性方程式は変形と温度分布の関係を記述する連立非線形偏微分方程式である。この連立方程式に関連する方程式について考察した。研究期間中に得られた結果は、（１）３次元形状記憶合金のFalk-Konopkaモデルに等温の仮定の下で弱い摩擦を付与した方程式の高次漸近展開、（２）等温Falkモデルに対しての２種の不変測度の構成、（３）伸張性を考慮した梁の振動を記述するWoinowsky-Krieger方程式の特異極限問題、（４）Falkモデルやその周辺の方程式に対しての構造保存型数値解法に対するエネルギー法、の４点である。

研究成果の概要（英文）：Thermo-elastic system describes a relation between elastic deformation and distribution of temperature. It is represented by the system of nonlinear partial differential equations for displacement vector and temperature. We studied equations related to the system. Our results for this research subject are as follows: (1) higher order asymptotic expansion of solution for the weakly damped isothermal Falk-Konopka model of three-dimensional shape memory alloys, (2) construction of two kinds of invariant measure for the isothermal Falk model, (3) singular limit problem for the Woinowsky-Krieger equation of extensible beam equation, (4) energy methods for the structure-preserving finite difference schemes of the Falk model and other equations.

研究分野：数学解析

キーワード：非線形偏微分方程式　熱弾性　塑性

１．研究開始当初の背景

固体の弾性変形と熱伝導の関係を表現する熱弾性方程式は，変位についての弾性方程式(双曲型または分散型)と温度についての熱方程式(放物型)との連立偏微分方程式である．熱弾性方程式は変位と温度の相互作用によって放物型と双曲(分散)型の中間的な性質を持つことがあり解の挙動を単純には分類できない．

熱弾性に対しては多くの研究業績が知られている．特に熱弾性を線形化した方程式の散逸性を取り出し，連立偏微分方程式の枠組みで一般化した静田-川島(1985)の結果は熱弾性を研究する上で重要な結果の一つである．しかし，この結果は非線形性の強い広範な方程式に対する一般論であるため，可解性(解の存在)を示すには初期値が十分小さいという仮定が必要になる．一方で形状記憶合金方程式など，対象とする方程式を特化することで，初期値が小さいという仮定がなくても解の存在を示せることがある．しかし解の挙動についての結果は少なく，例えば形状記憶合金方程式でも解の挙動は未解決である．「熱弾塑性」については Krejci-Sprekels (1997) によって解の存在は示されているが，一意性や解の挙動については知られていない．

また応用上重要になるのが「モデルの正当性」である．固体力学のモデルの理論解析は粗い近似が多くきちんと見直すべき箇所がいくつかある．例えば大きな変形に対しての理論について，より汎用性の広い理論の構築とその正当性の検証が，応用分野からも望まれている．

２．研究の目的

熱弾塑性変形や損傷など固体の大変形問題に関わる現象を表現するモデルについて数学を用いて解析し，材料の安全性を保証する問題などへと応用したい．その準備として，本研究では熱弾性の非線形偏微分方程式の解の挙動や性質を理論数学の立場から調べ，更にその極限モデルと位置づけられる熱弾塑性の方程式の解の挙動まで特定することを目的としている．

数学の立場からみると，本研究は，調和解析・関数解析・凸解析・確率論・幾何学など様々な問題と関連がある．本研究を通じてこれらの多岐にわたる数学理論の発展に寄与すること，および工学分野の研究者と連携しこれらの理論の応用例を見つけることも本研究の目的である．

３．研究の方法

これまで代表者は，主に形状記憶合金方程式の可解性と解の挙動について研究を行ってきた．形状記憶合金方程式は熱弾性の特別な場合に対応するモデルで弾性部分が半線形になるのが特徴である。形状記憶合金などの場合は，大きい変位を考えることが現象として自然である．この場合，線形化方程式の相互作用の項が退化するため，連立系とみて消散性を取り出す静田-川島の方法を直接は適用できない．一方で，系にある種のエントロピーの役割を果たすリアプノフ関数を見つけると，温度が一様分布に近付くことが示される場合がある．実際，形状記憶合金方程式についてはこのことが成り立つ．この場合，定数温度が特定できれば，等温問題を考察し変位の挙動を調べることで連立系の挙動が定まる．上記の流れから近年代表者は連携研究者とともに熱弾性問題の等温問題を考察してきた．一方，熱弾塑性問題は熱弾性の吉田近似による極限問題と見なせるため，熱弾性の結果の極限を調べることで熱弾塑性の解の挙動もまた特定できるであろうと考えた．

これらの経緯を踏まえて，申請者が本研究で発展させる内容は，大きな変形についての熱弾性の解の挙動を明らかにするため，まずその等温問題(Ⅰ)を考察し，その結果を非等温な熱弾性問題(Ⅱ)に応用し解の挙動を得る．さらにこの結果の極限を考えることで熱弾塑性(Ⅲ)の解の挙動まで特定する」ことである．

研究を進める上で意識することは，積極的に国内外の研究者と交流し研究に関する情報収集と議論をすることで，効果的な研究を行う．特に夏期には毎年二週間程度海外の共同研究者の下に滞在する．また工学などの応用分野の研究者とも連携し情報交換および検証実験を行う．研究期間を通じて，工学分野の情報を取り入れ，適時検証実験を行う．これらの情報交換から派生して生まれる問題があればその解析も行う．また研究室の大学院生には数値実験を依頼する．

４．研究成果

上記の方法に沿って研究を行い実際に研究期間に得られた研究成果は以下の(1)～(4)に分類できる．

(1) Falk-Konopka によって提案された３次元の形状記憶合金の熱弾性変形を記述するヘルムホルツの自由エネルギーはひずみに対して６次の多項式である．そのため，導出される熱弾性方程式は弾性方程式の方にひずみについて５次の非線形項が現れる．これは Sobolev 臨界に対応する次数で，エネルギークラスでも大きな初期値に対する解の存在を示すことは難しいと予想される．そのためまず等温問題に弱い消散構造をもつ摩擦項を加えた問題について考察した．残念ながら摩擦項を加えたにも関わらず大きな初期値に対する結果は得られなかったが，代わりに非線形の効果が現れる高次の漸近形を含めた漸近展開の公式を求めることに成功した．数学の立場からみるとこの結果は高次漸近形に非線形効果が現れる箇所を求める単純な方法の応用例となっており，１次元の梁の方程式に対しての結果を一般化した形にな

っている．これら漸近形についての研究は竹田寛志氏との共同研究に基づく．
(2) 摩擦のつかない定常 Falk モデルは非線形項が double-well 型の Boussinesq 方程式になる．この方程式はいわゆるハミルトン方程式であるため解の減衰は期待できない．そこで解の挙動を理解する上で２種類の不変測度を構成することを考えた．一つはよく知られている Gibbs 測度と呼ばれる不変測度で，Bourgain の方法を適用することで比較的容易に構成が可能である．ただこの不変測度ではとても弱い意味での解しか測ることができない．そこでもう一つ Kuksin による不変測度を構成することを考えた．これは，対象となる微分方程式に粘性項と加法的確率外力項を加えた方程式を考え，まずその確率微分方程式に対して不変測度を構成し，粘性項と確率外力項の係数を同時に適切な比でゼロへの極限をとることで目標となる元の方程式の不変測度を構成するという方法である．この方法で構成した不変測度は Gibbs 測度に比べて，滑らかな解も台に持つ．これらの不変測度に関する研究は堤誉志雄氏との共同研究に基づく．
(3) 伸縮を考慮して梁の変形を記述する Woinowsky-Krieger 方程式について考察した．この方程式は非局所非線形項をもつ Kirchhoff 方程式に４階の項を加えた半線形偏微分方程式である．この方程式の初期値問題，すなわち空間が全領域の場合について考察する．時間分割によるエネルギー法により，任意の大きさの初期値に対する時間減衰評価を得た．またこの減衰評価を利用することで，加速度項を消失する特異極限問題の評価を示した．本研究は Reinhard Racke 氏との共同研究である．
(4) 解の挙動の予測をたてる上で数値計算を研究室の大学院生と取り組んだ．強引に数値計算に持ち込んでもよいデータが得られなかったため，数値解析の専門家に助言を求めたところ，構造保存型数値解法に行き着いた．まずは等温 Falk モデルに対して構造保存型の数値計算スキームの数値計算を行い，ソリトン解の伝播を確認した．また既存の結果を参考にして解の存在と誤差評価を証明した．次に，等温の仮定を取り除いた一般の熱弾性型の Falk モデルに対して，エネルギー保存，モーメント保存，エントロピー増大の全てを満たす構造保存型数値解法を構成した．このスキームは時間の刻み幅が空間の刻み幅と比較して十分小さければ解の存在も示すことができる．もう少し踏み込んで考察を進めてみると，時間局所解をアプリオリ評価の成り立つエネルギークラスで構成することで，時間の刻み幅を小さくとる仮定を空間の刻み幅によらないものに改善できることがわかった．これはいわゆる連続な偏微分方程式におけるエネルギー法の手続きがそのまま離散の数値計算スキームに導入できることを意味している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

(1) Shuji Yoshikawa, Energy method for structure-preserving finite difference schemes and some properties of difference quotient, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol.311, 2017, 394-413. DOI: 10.1016/j.cam.2016.08.008

(2) Shuji Yoshikawa, An error estimate for structure-preserving finite difference scheme for the Falk model system of shape memory alloys, IMA Journal of Numerical Analysis, 査読有, Vol.37, 2017, 477-504. DOI: 10.1093/imanum/drv072

(3) 吉川周二, Remarks on the structure-preserving finite difference scheme for the Falk model of shape memory alloys, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1997, 2016, 156-164.

(4) Reinhard Racke and Shuji Yoshikawa, Singular limits in the Cauchy problem for the damped extensible beam equation, Applicable Analysis, 査読有, Vol.95, 2015, 1118-1136. DOI:10.1080/00036811.2015.1053051

(5) Shuji Yoshikawa, A conservative finite difference scheme for the Falk model system of shape memory alloys, ZAMM - Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 査読有, Vol.95, 2015, 1393-1410. DOI:10.1002/zamm.201300177

(6) Yoshio Tsutsumi and Shuji Yoshikawa, INVARIANT MEASURES FOR THE ISOTHERMAL FALK MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, 査読有, Vol.37 , 2015, 163-182.

(7) Kyosuke Ichikawa and Shuji Yoshikawa, AN ERROR ESTIMATE OF CONSERVATIVE FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR THE BOUSSINESQ TYPE EQUATIONS, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 査読有, Vol.23, 2013, pp.413-435.

(8) Hiroshi Takeda and Shuji Yoshikawa, On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear beam equation with weak damping for large initial data, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, Vol.64, 2013, 507-514.

(9) Hiroshi Takeda and Shuji Yoshikawa, On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping I: smoothing effect, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, Vol.401, 2013, 244-258.
DOI:10.1016/j.jmaa.2012.12.015

(10) Hiroshi Takeda and Shuji Yoshikawa, Asymptotic profiles of solutions for the isothermal Falk-Konopka system of shape memory alloys with weak damping, Asymptotic Analysis, 査読有, Vol.82, 2013, 331-372.
DOI:10.3233/ASY-2012-1148

〔学会発表〕(計２２件)

(1) 吉川周二、ある半線形熱弾性方程式に対する構造保存型差分解法と誤差解析、2017年2月7日、神戸大学解析セミナー、神戸大学(兵庫県・神戸市)

(2) 吉川周二、Asymptotic profile of solution for the Cauchy problem of damped beam equation with variable coefficients、2017年1月20日、HMAセミナー・冬の研究会2017、広島大学（広島県・東広島市）

(3) 吉川周二、Asymptotic profile of solution for the Cauchy problem of beam equation with time dependent coefficient、2016年12月3日、第3回神楽坂非線形波動研究会、東京理科大学(東京都・新宿区)

(4) 吉川周二、Structure-preserving finite difference schemes for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions in the on-dimensional case、2016年11月19日、数学と現象：Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2016、宮崎大学（宮崎県宮崎市）

(5) 吉川周二、A finite difference method for two-dimensional semilinear thermoviscoelastic systems and its error estimate、2016年9月12日、第12回非線型の諸問題、かんぽの宿 湯田(山口県山口市)

(6) 吉川周二、Structure-preserving numerical scheme for linear stochastic evolution equations with additive noise、2016年5月18日、京都大学数理解析研究所共同研究「線形及び非線型分散型方程式に関する最近の進展」、京都大学(京都府京都市)

(7) Shuji Yoshikawa、Structure-preserving finite difference schemes of semilinear thermoelastic system for shape memory alloys、2016年1月28日、第33回九州における偏微分方程式研究集会、九州大学西新プラザ(福岡県福岡市)

(8) 吉川周二、Energy method for structure-preserving finite difference schemes and some properties of difference quotient、東北大学応用数学セミナー、2015年11月5日、東北大学（宮城県仙台市）

(9) Shuji Yoshikawa、Singular limits and decay estimates of the Cauchy problem for the damped extensible beam equation、RIMS研究集会「非線形現象の解析への応用としての発展方程式論の展開」、2015年10月23日、京都大学数理解析研究所（京都府京都市）

(10) 吉川周二、構造保存型有限差分スキームに対するエネルギー法とその応用、応用数学に関する勉強会（応用数学セミナー）@芝浦工大、2015年10月3日、芝浦工業大学（埼玉県さいたま市）

(11) 吉川周二、熱弾性の構造保存型数値解法、熊本大学応用解析セミナー、2015年9月5日、熊本大学（熊本県熊本市）

(12) Shuji Yoshikawa、Singular limit and asymptotic behavior of solution to the Cauchy problem of damped extensible beam、10th ISAAC Congress、2015年8月7日、マカオ（中国）

(13) 吉川周二、Energy method for structure-preserving finite difference schemes, and its applications、NLPDEセミナー、2015年6月5日、京都大学理学部（京都府京都市）

(14) 吉川周二、Singular limit and asymptotic behavior of solution to the Cauchy problem of damped extensible beam、愛媛大学解析セミナー、2015年5

月 8 日、愛媛大学理学部（愛媛県松山市）

(15) Shuji Yoshikawa、Refined proofs of existence and error estimate for the structure-preserving finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation 、 Seminar Nichtlineare Optimierung und Inverse Probleme, WIAS in Berlin、2015 年 1 月 22 日、ベルリン（ドイツ）

(16) Shuji Yoshikawa 、 Structure-preserving finite difference scheme for thermoelastic systems and its applications 、 Oberseminar Partielle Differentialgleichungen, Universität Konstanz、2014 年 7 月 21 日、コンスタンツ（ドイツ）

(17) Shuji Yoshikawa 、 Structure preserving finite difference schemes for some thermoelastic systems、The 10th AIMS Conference、2014 年 7 月、マドリッド（スペイン）

(18) Shuji Yoshikawa 、 Structure Preserving Finite Difference Schemes for the Falk Model of Shape Memory Alloys 、 Conference on Partial Differential Equations 2014(COPDE2014)、2014 年 5 月 31 日、ノバッチェラ（イタリア）

(19) 吉川周二、A conservative finite difference scheme for the Falk model system of shape memory alloys、第３回弘前非線形方程式研究会、2013 年 11 月 18 日、弘前大学（青森県弘前市）

(20) Shuji Yoshikawa 、 An error estimate of conservative finite difference scheme for the Boussinesq type equations 、 The 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations、2013 年 8 月 21 日、北海道大学（北海道札幌市）

(21) 吉川周二、An error estimate of the conservative finite difference scheme for the isothermal Falk model of shape memory alloys、福岡工業大学数学小研究集会、2013 年 7 月 12 日、福岡工業大学（福岡県福岡市）

(22) 吉川周二、Error estimates of the conservative finite difference scheme for the Boussinesq type equations、京都大学数理解析研究所 共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究」、京都大学（京都府京都市）

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://lab.ms.oita-u.ac.jp/yoshikawa/

６．研究組織

(1)研究代表者
吉川　周二　（YOSHIKAWA, Shuji）
大分大学・工学部・教授
研究者番号：80435461

(2)研究分担者
黄木　景二　（OGI, Keiji）
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：　70281194

(3)連携研究者
鈴木　貴（SUZUKI, Takashi）
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：　40114516

堤　誉志雄（TSUTSUMI, Yoshio）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：　10180027

竹田　寛志（TAKEDA, Hiroshi）
福岡工業大学・工学部・准教授
研究者番号：　10589237

(4)研究協力者
Reinhard Racke (RACKE, Reinhard)
コンスタンツ大学・理学部・教授