

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：24201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400173

研究課題名(和文)ある特異性を持つ波動伝播のグリーン関数の漸近挙動とその散乱理論への応用

研究課題名(英文)The asymptotic behavior of Green function for wave propagation with some singularities and the applications to scattering theory

研究代表者

門脇 光輝(Kadowaki, Mitsuteru)

滋賀県立大学・工学部・教授

研究者番号：70300548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：屈折現象を伴う波動伝播に対するグリーン関数の漸近挙動とその散乱問題への応用を主に研究した。特に、二層媒質が占める3次元全空間中の異物などの散乱体へ入射した平面波によって発生する散乱波は、空間遠方で各層の伝播速度に応じた球面波のごとく振る舞うことを、該当するグリーン関数の漸近挙動の解析から示した。さらに、この成果を得た解析方法を用いて自由境界付き弾性波動伝播に対しても類似の成果を得た。また、関連する成果として、摩擦項を伴う波動方程式に対する定常解の評価とマクスウェル方程式の解の界面に対する正則性について、それぞれの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied the asymptotic behavior of Green functions concerning wave propagation having refraction phenomena. Moreover, as the applications, we studied scattering theory of such wave propagation. Especially, we analyzed Green functions concerning wave propagation in two layered media of three dimensional space. And using this result, we proved that scattering wave consists of two kinds of spherical wave characterized by each medium. Here, scattering wave means reflective wave which is occurred by a plane wave being incident on an obstacle. Moreover, by same method as in this research, we obtained similar results concerning three dimensional elastic wave propagation in a half space with free boundary condition. As related results, we also obtained results concerning estimations for solutions to stationary wave equations with dissipative terms and the regularity at interface of the solutions to Maxwell equations, respectively.

研究分野：数学的散乱理論

キーワード：音響波動伝播 弾性波動伝播 レゾルベント 散乱振幅 一般化されたフーリエ変換 摩擦項を伴う波動方程式 マクスウェル方程式 解の正則性

1. 研究開始当初の背景

物理学・工学において、散乱体(原子など)に向けて平面波(電子などの粒子)を入射したときの散乱波の様子を研究する際に、ポテンシャル散乱では Schrödinger 方程式や物体散乱では音響波動方程式などの時間と空間変数の偏微分方程式を考える。しかし、これらをそのまま扱うのではなく、時間と空間変数を分離することによって得られる空間変数のみの方程式(Helmholtz 方程式)の解を用いて考察する場合がある。具体的には、文頭で述べた入射と散乱の様子が Helmholtz 方程式の解の空間遠方での漸近挙動が平面波と球面波の重ね合わせで表現できるとして扱われる。この球面波の係数(振幅)が散乱振幅と呼ばれる量で、散乱体の情報を引き出す重要な量となる。また、この考え方に基づいて散乱振幅を数値計算で近似的に導出することも盛んに行われている。以上の議論を遂行する上で鍵となるのは、非摂動系(散乱体がない場合)に対する Green 関数の情報・性質である。特に、放射条件などの空間遠方での漸近挙動は重要な役割を担う。

上記の考え方の数学定式化は、非摂動系の生成作用素が N 次元全空間(Euclid空間)における Laplacian である方程式(例えば、2体ポテンシャル散乱や物体散乱)に対して構築されている(例えば Colton-Kress(1997)、Newton(1989))。研究が進んだ大きな要因は、その Green 関数が具体的な関数(特殊関数)で記述できることにある。特に、その漸近挙動は特殊関数のそれから導かれる。同様に3次元全空間における等方弾性波に対する Green 関数も具体的に記述できる。また、Maxwell 方程式を含む一般の一階双曲系の生成作用素に対する Green 関数の漸近挙動についても Matsumura(1972)などより、詳しく研究されている。ただし、この場合は一般的な系を扱うゆえに特殊関数の漸近挙動を利用した議論ではなく、定常位相の方法を適用した議論を経由して漸近挙動を導いている。一方、最近の数学としての研究では、Green 関数や Helmholtz 方程式の代わりに、スペクトル分解定理に基づいて生成作用素のリゾルベントを解析する方法が主流である。しかし、扱いが抽象的であるために、この考えに基づいた数値計算で散乱振幅を導出することは現実・実用的ではないと思われる。その中で、Yafaev(1991)はリゾルベントの漸近挙動を用いた数学的散乱理論を提案している。それは Agmon-Hönlmander(1976)が提案した空間遠方の漸近挙動によって決定される位相(Agmon-Hönlmander 位相と記す)を用いた定式化である。これは Green 関数の漸近挙動を用いた考え方の一般化でもある。そして、この定式化により、Yafaev は2体 Schrödinger 方程式に対する Helmholtz 方程式の解の漸近挙動が、平面波と散乱振幅と球面波の積の重ね合わせで表現できることを示している。

2. 研究の目的

その固有関数が特異性を持つことから、上記の数学的定式化が十分とはいえない方程式、例えば

① 3次元自由境界付きの半空間における等方弾性波動方程式

② 三層状媒質が占める3次元全空間における音響波動方程式

がある(①は地震波を記述する)。これらの解は、空間のあらゆる方向に伝播する波(自由波)とこれに比べ1次元が低い領域を伝播する波(ガイド波)の重ね合わせで記述される。このことは固有関数展開定理として、①については Dermenjian - Guillot(1988)、②については Wilcox(1984)においてそれぞれ証明されている。

本研究では主に①と②に対する Green 関数の空間遠方の漸近挙動を決定した上で、それぞれの摂動系(散乱体も仮定した場合を指す)に対して Yafaev が提案した散乱理論を展開することを目的とする。そして、その応用として数値計算による散乱振幅の導出についても検討する。なお、研究を進める際には次の特異性に注意する。①と②の自由波固有関数は、境界や層への入射波とその反射または屈折波・透過波の重ね合わせで記述され、臨界角と呼ばれる入射方向で十分な可微分性を持ち合わせていない。これは屈折波(①は屈折反射波)の存在を起因とする特異性である。また、①については、境界付近を主に伝播するガイド波(Rayleigh 波)が現れる(1種類のみ)。②については、各層における伝播速度の条件によって、主に中層を伝播するガイド波が現れる。ただし、この場合のガイド波は加算無限種類現れる。その影響で、連続スペクトル上に臨界角による特異点とは異なる特異点(敷居値)が現れる。従って②の研究では、この特異性にも留意しなければならない。

3. 研究の方法

Dermenjian - Guillot と Wilcox の固有関数展開定理に Matsumura と Yafaev 議論を適用する(次の(1)~(3)に従って研究を進める)。(1) Green 関数に関連して現れる球面上の積分の解析: Dermenjian - Guillot と Wilcox により、Green 関数は Poisson 型積分で記述される。それに極座標を導入することで得られる球面上の積分を定常位相の方法で解析する。しかし、臨界角を反映して被積分関数(固有関数)が可微分性に関する特異性を持つため、標準的な定常位相の方法が適用できない(標準的な定常位相の方法は被積分関数に対して滑らかさを仮定している)。そのため、定常位相の方法を適宜見直ししながら、研究を進める。

(2) Green 関数の漸近挙動の決定: (1)の結果に Matsumura の議論を適用して Green 関数の漸近挙動を決定する。そして、それから非摂

動系に対するレゾルベントの漸近挙動を導く。

(3) 摂動系に対する Helmholtz 方程式の解析および散乱理論の展開：(2)の結果に Yafaev の議論を適用して摂動系に対するレゾルベントの漸近挙動を決定する。そして、それから摂動系に対する Helmholtz 方程式の解の漸近挙動を決定して、その結果から散乱振幅を導出・決定する。

なお、臨界角に関する解析方法に目途を付ける目的として、まず二層状媒質が占める 3 次元全空間における音響波動方程式(以下、⑩と記す)に対して上記(1)～(3)を実行する。⑩は屈折波が現れる最もシンプルな波動伝播を表す方程式である。

4. 研究成果

(1) ⑩に対して、Green 関数およびレゾルベントの空間遠方での漸近挙動を決定した。具体的には、空間遠方では二層媒質を反映した球面波(媒質の上半空間と下半空間のそれぞれの伝播速度を持つ球面波の張り合わせ)の如く振る舞うことを、各点評価の意味で示した(これより Agmon-Hölmänder 位相における漸近挙動が導かれる)。そして、この結果から⑩のある摂動系(⑩に有界な散乱体を仮定した波動伝播)に対する散乱振幅の決定・導出が可能となった(これより、Yafaev の散乱理論の展開が可能となった)。さらに、この結果も各点評価によるものであるので、数値計算による散乱振幅の導出の数学的後ろ盾となる。ただし、基となるレゾルベントの漸近挙動を得る際にある仮定を置いたため、散乱体にはある程度の滑らかなさ(可微分性)が必要となった。これらの成果については、以下の学会発表③、⑥、⑨、⑩、⑪、⑬、⑭、⑲、⑳、㉑、㉒、㉓、㉔、㉕、㉖、㉗で発表した。

また、数値計算による散乱振幅導出のための数学的成果も得た。具体的には⑩に対する Green 関数を数値計算で求めるための公式の導出を行った。なお、パソコンでの計算を想定して 2 次元での考察を行った。これについては、学会発表⑦で発表を行った。

(2) (1)での成果を得た方法を用いて、①のレゾルベントの空間遠方での漸近挙動を決定して、それを用いて、①のある摂動系に対して Yafaev の散乱理論を展開した。もう少し詳しく述べると、①の固有関数・モードは、自由波として、境界における入射波から構成される P モード：入射 P 波(縦波)+ 反射 P 波+反射 S 波(横波)、SV モード：入射 S 波+反射 S 波+反射 P 波、SVO モード：入射 S 波+反射 S 波+反射表面波(P 波)、SH モード：入射 S 波+反射 S 波に加えてガイド波としての R モード(Rayleigh 波)からなる。まず、レゾルベントの空間遠方での漸近挙動が、Agmon-Hölmänder 位相において、これらを反映した球面波の重ね合わせで記述できることを示した。そして、これを用いて、①のある摂動系に対する一般化された Fourier 変換の構成、定常解の Fourier 変換による特徴付

けを行い、定常解の空間遠方での漸近挙動と散乱行列の表現を得た。これらの成果は、学会発表①、②、⑮、⑯で発表した。

まとめると、⑩の研究過程で得た知見から研究目的の①に対する目的が達成された。②については、具体的な研究には至らなかったが、⑩と①に関する研究経験を参考に引き続き課題として取り組みたい。さらに⑩に対する数学的成果に基づいて、⑩に関する散乱振幅の数値計算による導出にも挑戦してみたい。

関連する成果として次(3)と(4)も得た。

(3) 磁場付き Schrödinger 方程式や摩擦項を伴う波動方程式に対する定常解の評価(一様レゾルベント評価)を行った。これらの結果にはこれまでに扱われてこなかった 2 次元外部領域の場合も含まれている。さらに、その応用として極限振幅の原理の既存の結果の改良などを行った。これらについては論文発表①、学会発表⑤、⑧、⑫、⑭、⑰、⑱、⑲、⑳、㉑、㉒、㉓、㉔、㉕、㉖で発表を行った。

(4) Maxwell 方程式などの 1 階偏微分方程式系の解に対して、界面(不連続面)における接線方向と法線方向の正則性に関する成果を、3 次元以上の場合も込めて得た。これについては学会発表④で発表を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① K. Mochizuki and H. Nakazawa, Uniform resolvent estimate for magnetic Schrödinger operators in 2D exterior domain and their applications to related evolution equations, Publications of Research Institute for Mathematical Sciences, 査読有, Vol. 51, No. 2, 2015, pp. 319 - 336

[学会発表] (計 27 件)

- ① 渡邊 道之, 半空間における弾性波動方程式の定常解の漸近挙動, 日本数学会 2016 年度年会函数解析学分会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学
- ② 渡邊 道之, Asymptotic properties of solutions to elastic wave equations on a half-space, Inverse problems of differential equations and related topics, 2016 年 1 月 26 日, 京都大学数理解析研究所
- ③ 門脇 光輝, On scattering amplitude for wave propagation in perturbed two-layered media, 第 13 回 Linear and Nonlinear Waves, 2015 年 11 月 3 日, ピアザ淡海滋賀県立県民交流センター
- ④ 渡邊 一雄, Maxwell 方程式の解の界面正則性とその一般化, 第 2 回 解析学の耳袋, 2015 年 10 月 28 日, 沼津プラザベルデ
- ⑤ 中澤 秀夫, 2 次元外部領域におけるシュレーディンガー作用素の一樣レゾルベント

- ト評価とその応用, 第2回 解析学の耳袋, 2015年10月28日, 沼津プラザベルデ
- ⑥ 門脇 光輝, Spectral analysis for wave propagation in two-layered media, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会函数解析学分科会特別講演, 2015年9月13日, 京都産業大学
- ⑦ 門脇 光輝, 2次元2層媒質中の波動伝播に対するグリーン関数について, 2015年夏の作用素論シンポジウム, 2015年9月5日, フェニックスプラザ(福井市)
- ⑧ 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimate for stationary dissipative wave equations in an exterior domain and their application to the principle of limiting amplitude, 10th International ISAAC Congress 3-8, 2015年8月7日, University of Macau (Macau, China)
- ⑨ 門脇 光輝, 二層媒質中の波動伝播に対するレゾルベントの空間遠方での漸近挙動, 解析セミナー, 2015年7月18日, 愛媛大学城北キャンパス
- ⑩ 門脇 光輝, 二層媒質中の波動伝播に対するレゾルベントの空間遠方での漸近挙動, 南大阪応用数学セミナー, 2015年7月11日, 大阪市立大学杉本キャンパス
- ⑪ 門脇 光輝, 二層媒質中の波動伝播に対するレゾルベントの空間遠方での漸近挙動, 作用素論セミナー, 2015年6月26日, 京都大学数理解析研究所
- ⑫ 中澤 秀夫, 摩擦項を伴う波動方程式の定常問題に対する解の評価とその応用, 信州大学偏微分方程式研究集会, 2015年6月13日, 信州大学松本キャンパス
- ⑬ 門脇 光輝, 二層媒質中の波動伝播に対するレゾルベントの空間遠方での漸近挙動, 九州関数方程式セミナー, 2015年5月29日, 福岡大学セミナーハウス
- ⑭ 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimate for stationary problem of dissipative wave equations in an exterior domain and the principle of limiting amplitude, Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation 2015, 2015年2月20日, 東京理科大学神楽坂キャンパス
- ⑮ 渡邊 道之, Asymptotic properties of solutions to elastic wave equations on a half-space, Inverse problems of differential equations and related topics, 2015年1月26日, 京都大学数理解析研究所
- ⑯ 渡邊 道之, 半空間弾性波動方程式の定常解について, スペクトル散乱前橋シンポジウム, 2015年1月12日, 前橋工科大学
- ⑰ 中澤 秀夫, 摩擦項を伴う波動方程式の定常解に対する一様レゾルベント評価とその応用, 解析セミナー, 2014年12月6日, 愛媛大学城北キャンパス
- ⑱ 中澤 秀夫, 摩擦項を伴う波動方程式の定常問題, 第12回 Linear and Nonlinear Waves, 2014年11月13日, ピアザ淡海滋賀県立県民交流センター
- ⑲ 中澤 秀夫, ヘルムホルツ方程式の解の評価とその応用, 釧路偏微分方程式研究集会, 2014年10月12日, 北海道教育大学釧路校
- ⑳ 中澤 秀夫, 摩擦項を伴う波動方程式の散乱問題とその周辺, 日本数学会2014年度秋季総合分科会函数方程式論分科会特別講演, 2014年9月26日, 広島大学西条キャンパス
- ㉑ 門脇 光輝, 二層媒質中の波動伝播に対するレゾルベントの空間遠方での漸近挙動, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会函数解析学分科会, 2014年9月25日, 広島大学西条キャンパス
- ㉒ 中澤 秀夫, Sharp uniform resolvent estimate and Helmholtz and Schrödinger equations in an exterior domain in \mathbb{R}^2 and their applications, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月10日, Madrid
- ㉓ 中澤 秀夫, 2次元外部領域におけるヘルムホルツ方程式の一樣レゾルベント評価とその応用, 九州関数方程式セミナー, 2014年6月14日, 福岡大学セミナーハウス
- ㉔ 門脇 光輝, 二層媒質中の波動伝播に対するレゾルベントの空間遠方での漸近挙動, 信州大学偏微分方程式研究集会, 2014年6月14日, 信州大学松本キャンパス
- ㉕ 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimate for Helmholtz equations in 2D exterior domain and their application, 保存則を持つ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究, 2014年5月30日, 京都大学数理解析研究所
- ㉖ 中澤 秀夫, 2次元外部領域における磁場付きSchrodinger作用素, 日本数学2014年度年会函数方程式論分科会, 2014年3月15日, 学習院大学
- ㉗ 門脇 光輝, 3次元半空間の弾性波のグリーン関数について, 神楽坂解析セミナー, 2013年7月27日, 東京理科大学神楽坂キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

門脇 光輝 (Mitsuteru Kadowaki)

滋賀県立大学・工学部・教授

研究者番号：70300548

(2) 研究分担者

中澤 秀夫 (Hideo Nakazawa)
日本医科大学・医学部・教授
研究者番号：80383371

渡邊 一雄 (WATANABE KAZUO)
学習院大学・理学部・助教
研究者番号：90260851

渡邊 道之 (WATANABE MICHYUKI)
新潟大学・人文社会教育科学系・准教授
研究者番号：90374181

(3) 連携研究者
なし