

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400175

研究課題名(和文) 流体方程式系の解の拡散波動現象の研究

研究課題名(英文) Diffusion wave property of the solutions to the system of the viscous fluid flow

研究代表者

小林 孝行 (Takayuki, Kobayashi)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：50272133

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：半空間、摂動半空間、外部領域における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題を考察し、空間に関して重みが付いた  $L_p$  空間において、解の時間に関する減衰評価を導いた。2次元外部領域における冪乗型の非線形熱方程式と消散項付波動方程式の初期値境界値問題では、初期値が Hardy 空間に属する場合を考えると、2次元では臨界である解の時空間に関する  $L_2$  有界性を得ることが出来た。この結果は、先に得られていた外部領域における摩擦項付き冪乗型の非線形波動方程式の初期値境界値問題の結果の拡張になっている。

研究成果の概要(英文)：We consider the initial boundary value problems for incompressible Navier-Stokes equations in half space and perturbed half space. We proved the time decay estimates for the solutions in weighted  $L_p$  space. We also consider the semilinear heat equations and dissipative wave equations in two dimension exterior domains. We showed the  $L_2$  boundedness with respect to the space and time variables of the solutions for initial data in the Hardy space.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：圧縮性流体 Navier-Stokes 方程式 Stokes 方程式 消散型波動方程式 非線形波動方程式 線形粘性弾性体方程式

### 1. 研究開始当初の背景

流体力学に現れる圧縮性粘性流体の運動を記述した圧縮性 Navier-Stokes 方程式では, A. Matsumura and T. Nishida により, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態は, 小さい初期摂動に対して安定であることが示された. より詳しい解の時間に関する漸近構造は, 全空間の初期値問題の場合, D. Hoff and K. Zumbrun 等, 半空間の初期値境界値問題の場合, Y. Kagei and T. Kobayashi 等により研究されている. 圧縮性 Navier-Stokes 方程式における定数平衡状態の近くの線形化方程式は, 双曲型放物型混合方程式であり, 解の密度部分は線形粘性弾性体方程式, つまり強消散項を持つ波動方程式を満たす. そのため, 解の拡散波動の現象と広い意味での Huygens の原理が現れることが示唆されている. 定数平衡状態の周りでの線形化方程式の全空間における初期値問題, 半空間における初期値境界値問題の場合, 解の表現公式を用いて, 解の時間に関する漸近挙動の研究が行われてきた. その結果, 全空間における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題, 半空間における初期値境界値問題の解は, 拡散項, 拡散波動項, 高減衰項に漸近的に分類されることが知られている. 拡散項の第一近似は, 半空間の場合は非圧縮性 Stokes 方程式の初期値境界値問題の解の速度場である. 従って, 熱方程式の初期値問題の解が第一近似である全空間の場合と異なる. また, 拡散波動項は, 解の密度部分であり, 線形粘性弾性体方程式を満たすという結論が得られている. これらの解析から, 全空間, 半空間のみならず, 様々な非有界領域における非圧縮性 Stokes 方程式および Navier-Stokes 方程式の初期値, 初期値境界値問題の解のプロファイルを特徴付ける空間で解の評価を確立し, 様々な非有界領域における初期値境界値問題でも, 全空間の場合に近い漸近挙動を示し, より明解に解の拡散波動の現象を解析することが求められている.

### 2. 研究の目的

本研究では, 流体方程式系の解の拡散波動現象を数学的に明らかにすることが目的である. 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態の安定性の研究で示唆されていることは, 解の拡散波動の現象と広い意味での Huygens の原理を明らかにすることである. そのため, 解の第一近似として現れる線形粘性弾性体方程式および非圧縮性 Stokes 方程式, Navier-Stokes 方程式を中心に, 解の時間に関する漸近挙動について研究する. 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式では, 解のプロファイルを明瞭にする関数空間上での解析を目指し, 解のプロファイルを特徴付ける評価を導くことを目的とする. また, これまでの圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態の安定性の研究で, 2次元空間における線形化方程式の初期値および初

期値境界値問題において, 初期値が  $L^1$  に属する場合でも, 解の  $L^2$  評価には時間に関して  $\log$  オーダー分の損失が現れることが知られている. また, Sobolev の埋め込み定理の臨界なども解析を困難にする理由であり, これまで十分な結果が得られていない. 2次元外部領域における半線形消散項付き波動方程式の初期値境界値問題等の研究でも同様であり, 全空間の2次元熱方程式の初期値問題であっても, 初期値が  $L^1$  に属するだけでは, 解の時空間における  $L^2$  有界性は一般に成り立たない. M. Misawa, S. Okamura との外部領域における消散項付き非線形波動方程式の初期値境界値問題の研究では, Hardy 空間と  $BMO$  空間の duality に関する Fefferman-Stein 不等式と Morawetz の方法を用いたエネルギー法を確立し, 非線形構造に着目することで, 解の時空間の  $L^2$  有界性を得ることに成功した. そのため, 線形粘性弾性体方程式および非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対してもこれらの手法を解明し, 2次元全空間の圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題の密度部分の解の構造を明らかにすることも目的の一つである.

### 3. 研究の方法

本研究目的を遂行するためには, 多くの数学者との研究討論が不可欠であり, また, 最新の結果や手法を常に研究することが必要である. そのため, 研究分担者の佐賀大学の梶木屋龍治教授と, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の拡散波動の現象の解析の中で, Morawetz の方法を用いたエネルギー法の確立のために重要な楕円型偏微分方程式の研究討論を行う. 連携研究者である熊本大学の三沢正史教授と線形粘性弾性体方程式の実解析的な手法, 九州大学の隠居良行教授と圧縮性 Navier-Stokes 方程式の非線形解析, 筑波大学の久保徹隆講師と, 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の重み付き評価に関する研究討論を行い, 研究代表者である申請者が総括する.

(1) R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer and S. Semmes 等の結果を参考にして, 非線形楕円型偏微分方程式論の専門家である梶木屋龍治教授と最新の情報収集および研究討論を行う. また, 実解析学の手法による解の正則性の研究の専門家である三沢正史教授と研究討論し, 線形粘性弾性体方程式について Morawetz の方法を用いたエネルギー法の理論の確立および非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題への応用を研究する.

(2) 全空間, 半空間, 外部領域における非圧縮性非定常 Navier-Stokes 方程式の初期値問題, 初期値境界値問題の解の空間に関する重み付き評価を研究し, 局所エネルギー減衰評価に詳しい久保徹隆講師と研究討論を行い, 摂動のある半空間や外部領域における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式

の解の空間に関する重み付き評価を研究する

(3) D. Hoff and K. Zumbrun 等の結果とこれまでの研究結果を参考にし、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の研究の専門家である隠居良行教授と圧縮性 Navier-Stokes 方程式への応用、特に、解の拡散波動の現象を研究討論する。

#### 4. 研究成果

圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態の安定性の研究で示唆されていることは、解の拡散波動の現象と広い意味での Huygens の原理を明らかにすることである。そのために、解の第一近似として現れる線形粘性弾性体方程式および非圧縮性 Stokes 方程式、Navier-Stokes 方程式を中心に、解の時間に関する漸近挙動について研究を行った。圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態の周りでの線形化方程式の場合、解の表現公式の漸近展開の解析から、解は、拡散項、拡散波動項、高減衰項に分類され、拡散項の第一近似は、非定常 Stokes 方程式の解の速度場であることが知られている。そのため、3次元以上の滑らかな境界を持つ外部領域、2次元以上の半空間および摂動半空間における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題を考察し、解のプロファイルを明瞭にする関数空間として、Muckenhoupt クラスに属する空間に関して重みがついた  $L_p$  空間を考え、その空間上での Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を示し、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の重み付き  $L_p$  空間において、解の時間に関する減衰評価を導いた。

外部領域における初期値境界値問題では、全空間における Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を導き、Stokes 半群の境界近くの局所エネルギー減衰評価を用いることで Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を示した。この結果を用いて、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題について、重み付き  $L_p$  空間において、解の時間に関する減衰評価を導くことが出来た。

半空間における初期値境界値問題では、空間に関して水平方向と垂直方向に重みがついた  $L_p$  空間を考え、その空間上での Stokes 半群の  $L_p$ - $L_q$  評価を、半空間における解の表現公式を用いることで導き、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題の解の重み付き  $L_p$  空間における時間に関する減衰評価を導いた。

摂動半空間における初期値境界値問題では、半空間における Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価と摂動部分近くの局所エネルギー減衰評価を用いることで摂動半空間における Stokes 半群の重み付き  $L_p$ - $L_q$  評価を導き、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題の解の重み付き  $L_p$  空間における時間に関する減衰評価を導く事ができた。

全空間における線形粘性弾性体方程式、つまり強消散項を持つ波動方程式の解は、熱方程式による拡散と波動方程式による伝搬の影響が現れることが予想される。2次元全空間における熱方程式の場合、初期値が  $L^1$  に属しても、解の時空間における  $L^2$  有界性は一般には成り立たない。我々は、2次元外部領域における冪乗型の非線形熱方程式の初期値境界値問題を考察し、初期値が Hardy 空間に属する場合を考え、Morawetz の方法を用いたエネルギー法と Fefferman-Stein の不等式、Hardy 型の不等式を用いることで、2次元では臨界である解の時空間に関する  $L^2$  有界性を得ることが出来た。この結果は、先に得られていた外部領域における摩擦項付き冪乗型の非線形波動方程式の初期値境界値問題の結果の拡張になっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[ 雑誌論文 ] (計 6 件)

[1] T. Kobayashi and T. Kubo,

Weighted  $L_p - L_q$  estimates of Stokes semigroup in half-space and its application to the Navier-Stokes equations, Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, (2016) pp. 337-349. 査読有

[2] T. Kobayashi,

$L^2$  boundedness of the solutions to the 2D Navier-Stokes equations and hyperbolic Navier-Stokes equations. RIMS kokyuroku, 1971, (2015) pp. 69-75. 査読無

[3] T. Kobayashi and T. Kubo,

Weighted estimate of Stokes semigroup in unbounded domains. Advanced Studies in Pure Mathematics, 64, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, (2014) pp. 427-435 査読有

[4] T. Kobayashi and T. Kubo,

Weighted  $L_p$ - $L_q$  estimates of the Stokes semigroup in some unbounded domains. Tsukuba Journal of Mathematics, 37, No 2. (2013) pp179-205 査読有

[5] T. Kobayashi and M. Misawa,

$L^2$  boundedness for the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations RIMS Kokyuroku Bessatsu, B42, (2013) pp. 1-11. 査読有

[6] T. Kobayashi and T. Ogawa,

Fluid mechanical approximation to the degenerated drift-diffusion system from compressible Navier-Stokes-Poisson system, Indiana Univ. Math. J., 62, No. 3. (2013) pp. 1021-1054. 査読有

〔学会発表〕(計 21 件)

[1] T. Kobayashi,

圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動, 応用非線形偏微分方程式論の展開, 2015年3月27日, 大阪大学基礎工学研究科, 大阪府豊中市

[2] T. Kobayashi,

Decay estimates of the solutions to the 2D compressible Navier-Stokes equation, International Conference "The Navier-Stokes Equations and Related Topics", 2015年3月7日-2015年3月11日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究所, 愛知県名古屋

[3] T. Kobayashi,

2次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動について, 北九州地区における偏微分方程式研究集会, 2015年11月28日, 小倉リーセントホテル 福岡県北九州市

[4] T. Kobayashi,

Decay estimates of the solutions to the 2D linear viscoelastic equations and its applications to the compressible Navier-Stokes equations, "International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics", 2015年11月10日-2015年11月13日, Nishi-Waseda Campus, Waseda University, Tokyo

[5] T. Kobayashi,

L2-boundedness of the solutions to the 2D compressible Navier-Stokes equations, Mathflows 2015, 2015年9月13日-2015年9月18日, The IGESA center, Porquerolles, France

[6] T. Kobayashi,

Decay property for the 2D Hyperbolic Navier-Stokes equations and its applications, 微分方程式の総合的研究, 2014年12月20日-2014年12月21日, 京都大学理学部, 京都府左京区

[7] T. Kobayashi,

Decay estimates of solutions to the 2D dissipative wave equations and Hyperbolic Navier-Stokes equations, International Conference on Recent Advances in Hyperbolic Partial Differential Equations, 2014年12月4日-2014年12月6日, 広島国際会議場, 広島県広島市

[8] T. Kobayashi,

L2 boundedness of the solutions to the 2D Navier-Stokes equations and Hyperbolic Navier-Stokes equations, RIMS研究集会「非圧縮性粘性流体の数理解析」, 2014年11月17日-2014年11月19日, 京都大学数理解析研究所, 京都府左京区

[9] T. Kobayashi,

Decay estimates of the solutions to the 2D Hyperbolic Navier-Stokes equations, Wayamba International Conference 2014, 2014年8月29日-2014年8月30日, Wayamba University of Sri Lanka, Kuliypitiya, Sri Lanka

[10] T. Kobayashi,

Decay estimates of solutions to the 2D Hyperbolic Navier-Stokes equations and its applications, 2014 ICM-Satellite-Cau, "Mathematical Theorey of Gases and Fluids and Related Applications", 2014年8月10日-2014年8月12日, Chung-Ang University, Seoul, Korea.

[11] T. Kobayashi,

L2 boundedness of the solutions to the 2D linear viscoelastic equations and its applications, NLPDE セミナー, 2014年5月16日, 京都大学理学部, 京都府左京区

[12] T. Kobayashi,

2次元双曲型 Navier-Stokes 方程式の解の L2 有界性, 南大阪応用数学セミナー, 2014年4月26日, 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス, 大阪府堺市

[13] T. Kobayashi,

2次元線形粘性弾性体方程式と2次元 Navier-Stokes 方程式の解の L2 有界性, 大阪大学数学教室 微分方程式セミナー, 2014年4月25日, 大阪大学理学部, 大阪府豊中市

[14] T. Kobayashi,

2次元波動方程式の解の有界性と圧縮性流体への応用, 北九州地区における偏微分方程式研究集会, 2013年11月30日, KMMビル 福岡県北九州市小倉北区

[15] T. Kobayashi,

L2 boundedness of the solutions to the 2D Hyperbolic Navier-Stokes equations, Mathematical Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations, 2013年11月13日~2013年11月15日, 九州大学西新プラザ, 福岡県福岡市早良区

[16] T. Kobayashi,

L2 boundedness for the solutions to the 2D damped or strong damped wave equations, 三大学偏微分方程式セミナー, 2013年10月30日, 中央大学後楽園キャンパス, 東京都文京区

[17] T. Kobayashi,

L2 boundedness of solutions to the 2D dissipative wave equations, Nonlinear Wave Equations and Fluid Mechanics, 2013年8月24日-2013年8月25日, 室蘭工業大学数学ゼミナール室, 北海道室蘭市

[18] T. Kobayashi,

L2 boundedness of solutions to the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations, 9th International Isaac congress, 2013年8月5日-2013年8月9日, Pedagogical University, Krakow, Poland

[19] T. Kobayashi,

L2 boundedness of the solutions to the 2D heat equations and the 2D Navier-Stokes equations, Analysis seminar, Pisa 2013 年 8 月 2 日-3 日, Pisa University, Pisa, Italy [20] T. Kobayashi,

Decay estimates of solutions to the 2D dissipative wave equations, 金沢解析セミナー, 2013 年 7 月 5 日, 金沢大学コロキウム 3, 石川県金沢市

[21] T. Kobayashi,

Decay estimates of solutions to the 2D heat equations and its applications, 神戸大解析セミナー, 2013 年 6 月 21 日, 神戸大学理学部, 兵庫県神戸市

〔図書〕(計 1 件)

T. Kobayashi, S. Shimizu, Y. Enomoto, N. Yamaguchi, T. Kubo, The proceedings on mathematical fluid dynamics and nonlinear wave, Gakkotosho Tokyou Japan, (2015), 192 pages

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小林 孝行 (KOBAYASHI TAKAYUKI)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号: 50272133

### (2) 研究分担者

梶木屋 龍治 (KAJIKIYA RYUJI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号: 10183261

### (3) 連携研究者

隠居 良行 (KAGEI YOSHIYUKI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号: 80243913

三沢 正史 (MISAWA MASASHI)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 40242672

久保 隆徹 (KUBO TAKAYUKI)

筑波大学・数理物質科学研究科・講師

研究者番号: 90424811