様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１５２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００１７６

研究課題名（和文）複数の場の相互作用を記述する非線形偏微分方程式の適切性と解の漸近挙動

研究課題名（英文）Well-poshness and asymptotic behaviour of solutions to nonlinear partial differential equations describing interaction between several fields

研究代表者
和田　健志（Wada, Takeshi）

島根大学・総合理工学研究科・教授

研究者番号：７０２９４１３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：数理物理に現れる非線形偏微分方程式に対し，その初期値問題の適切性や解の性質について研究した．方程式に初期条件や境界条件を課したときに，解が唯一つ存在し，与えられたデータに連続的に依存するとき，その問題は適切であるという．適切性を示すことは，方程式が現象を正しく記述していることを保証するために大切なステップである．主として非線形 Schrodinger 方程式の適切性について研究し，適切性に関してほぼ最良と思われる結果を得た．これに関連して分散型方程式・波動方程式の解の微分可能性，磁場付き Schrodinger 方程式の平滑化についても研究した．

研究成果の概要（英文）：We studied the well-posedness and properties of solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. A given problem for a partial differential equation with initial or boundary conditions is called well-posed if the problem has a unique solution, and if the solution depends continuously on the data given in the problem. This is an important step to ensure that the equation correctly describes the phenomenon. In this research we mainly studied the nonlinear Schrodinger equation and proved the well-posedness thereof under almost best possible conditions.
We also studied related problems such as differentiability of solutions to dispersive and wave equations, and smoothing property of magnetic Schrodinger equations.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形偏異聞方程式　分散型方程式　波動方程式　平滑化効果　適切性　解の漸近挙動

１．研究開始当初の背景

数理物理に現れる非線形偏微分方程式，なかでも非線形波動方程式・分散型方程式の研究は解析学の主要なテーマのひとつである．これらの方程式の研究はここ 30 年ほどの間に大きく進展してきた．特に最近十数年の間は Bourgain，Kenig−Ponce−Vega，Tao などに代表される調和解析を駆使した方法により，適切性に関する理論が大きく進歩した．また，解の漸近挙動についても，物理的に重要な例が多い長距離型散乱や大きなデータに対する散乱理論などの場合を含め，数多くの事柄が明らかにされてきた．これらの先行研究により，典型的な非線形波動方程式・分散型方程式の性質についてはかなりのことが判明しつつあった．これら先行する研究においては，林，堤，小澤，小川，中西，高岡氏など日本人による貢献も大きかった．

しかしながら，非線形 Schrödinger 方程式の適切性のような基本的問題に関しても，先行研究を丹念に調べてみると，仮定が不自然であったり，強すぎたりする場合もあり，全てが明らかになっているとは言えない状況であった．また，現実の自然現象は複雑であり，多くの場合，異なった性質を持つ複数の場がお互いに影響を与えあっている．この場合，現象を記述する方程式は異なる型の方程式の連立系となり，その解析には巧妙なアイデアと複雑な計算を必要とするため未解決の問題も多かった．

２．研究の目的

偏微分方程式の初期値問題は，その解が存在して一意的であり，解が初期データに連続に依存するとき，適切であるという．適切性はその偏微分方程式が現象を記述するモデルとして適当なものであることを保証するためにまず考察すべき数学的問題である．本研究では，主に非線形分散型方程式，波動方程式及びそれらの連立系について，その適切性及び解の挙動や様々な性質をあきらかにすることを目的としている．

非線形方程式の研究を行うにあたって，関係する線形方程式の性質は解析の基本的な手段となる．例えば，非線形 Schrödinger 方程式の適切性や解の挙動を考察するには，Strichartz 型評価や Kato 型平滑化評価などの不等式が必要となる．これらの不等式自体が数学的に興味深い対象であり，これついて研究することも目的である．

３．研究の方法

対象となる偏微分方程式を Banach 空間における発展方程式として捉え，関数解析の手法を用いることにより適切性や解の挙動を研究する．これを実行するためには，関数空間における種々の線形写像・多重線形写像の評価式を必要とする．そのために，方程式の代数的・幾何学的性質を十分に考慮した計算法や，補間空間論を含めた実解析の様々な技法を用いた．

４．研究成果

（1）冪乗型非線形 Schrödinger 方程式

冪乗型の非線形 Schrödinger 方程式は，レーザーの理論や非線形変調など，数理物理の様々な分野に現れる基礎方程式のひとつである．この方程式の適切性理論に関しては，1970 年代後半の Ginibre－Velo，Lin－Strauss，Baillon−Cazenave−Figueira などの研究をはじめとして数多くの研究がなされており，ほぼ完成に至ったと考えられていた．しかしながら，先行研究を丹念に眺めてみると，以下の観点から不十分であることに気づく．

非線形 Schrödinger 方程式のうちで応用上最も大切なのはゲージ不変な 3 次の非線形項をもつ場合である．また，初期条件の属するクラスでもっとも重要なのは不変量と関連した Lebesgue 空間 L2 および Sobolev 空間 H1 である．しかし，方程式の数学的構造を深く知るためには非線形項の冪（次数）や初期条件の滑らかさを一般化して考えた方がよい．すなわち，非線形項としては一般の p 次の冪乗型非線形項を考え，分数次の場合まで含めた一般の Sobolev 空間 Hs において方程式の適切性を考察する．この様に問題を一般化したうえで非線形 Schrödinger 方程式の適切性を詳細に論じたものとして Cazenave−Weissler（1990）の仕事がよく知られている．また，非線形項の滑らかさが低い場合の結果としては，Pecher (1997) の先駆的な仕事もあった．

しかしながら，これらの結果では，p が臨界冪で空間次元が大きい場合は取り扱えなかった．また，Pecher の結果では証明にギャップがあり，大きな初期値に対する時間局所適切性が本当に証明されたか疑問が残る．先行結果に対するこれらの欠点に注目した我々は，より自然な条件のもとで非線形 Schrödinger 方程式の適切性理論を構築することを目的として研究を行った．その際に鍵となったのは，時間変数に関する分数回微分を含む Strichartz 型評価の利用であった．Schrödinger 方程式は空間変数に関しては 2 階，時間変数に関しては 1 階の方程式であるから，空間変数に関する微分を時間変数に関する微分に置き換えることにより非線形項を微分する回数を減らすことができる．この様な発想は 1980 年代の堤誉志雄氏の研究にその萌芽が見られるが，分数次の Sobolev 空間において同様の解析を行うには時間変数に関する分数回微分を含む Strichartz 型評価が必要となる．この評価は初め Pecher

により示されたが，彼の評価は Schrödinger 方程式のスケール不変性を反映したものとなっていなかった．我々は Littlewood-Payley 分解を用いることにより Pecher の不等式の証明を書き直し，結果をスケール不変な形に改良した．さらにこれを用いて p が臨界冪の場合に適切性を証明することに成功した．さらに，時間局所適切性についての Pecher の証明に見られたギャップについてもそれを埋めることに成功した．ここで用いられた手法は他の分散型方程式にも適用可能と考えられ，非線形方程式の適切性に関する理解が一層すすむことが期待される．

(2) Magnetic Schrödinger 方程式の平滑化効果

複数の場の相互作用を記述する連立方程式系としては，電磁場と荷電粒子との相互作用を表す Maxwell-Klein-Gordon 方程式，Maxwell-Schrödinger 方程式，Maxwell-Dirac 方程式等がよく知られている．これらのうちで，我々は特に Maxwell-Schrödinger 方程式について研究してきた．この方程式は電磁場の時間発展を表す Maxwell 方程式と，荷電粒子の運動を記述する magnetic Schrödinger 方程式からなるため，この連立系を取り扱うするには magnetic Schrödinger 方程式の解析が必要になる．この際，エネルギー空間 H1 のように滑らかさの低い空間で適切性を証明するためには，電磁ポテンシャルに対する仮定をなるべく弱めた上で解析することが望ましい．この様な観点から，私は以前の研究で電磁ポテンシャルに対する滑らかさを余り仮定せずに magnetic Schrödinger 方程式の平滑化効果を示し，これを用いて空間 2 次元における Maxwell-Schrödinger 方程式はエネルギー空間において時間大域的に適切であることを証明した．しかしながら，そのとき示した評価式では，平滑化効果が本来期待されるもの(初期条件より解が 1/2 階滑らかになる)より若干弱くなっていた．今回の研究で，空間次元が 3 次元以上の場合，電磁ポテンシャルに対する十分弱い仮定の下で期待される平滑化効果が従うことを証明した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１７件）

① T. Wada, Kato type smoothing estimates for magnetic Schrödinger equations with rough potentials, Proceeding of the international conference ``Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations", Adv. Stud. Pure Math., 査読あり，印刷中.

②N. Kita, Y. Nakamura, Decay estimate and asymptotic behavior of small solutions to Schrödinger equations with subcritical dissipative nonlinearity, Proceeding of the international conference ``Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations", Adv. Stud. Pure Math., 査読あり，印刷中.

③ T. Iwabuchi, M. Nakamura, On the existence time of local solutions for critical semilinear Schrödinger equations in Sobolev spaces, Nonlinear Anal. Real World Appl., 査読あり, 33 (2017), 168–180.

④ M. Nakamura, T. Wada, Modified Strichartz estimates with an application to the critical nonlinear Schrödinger equation, Nonlinear Anal., 査読あり, 130 (2016), 138–156.

⑤ N. Saeki, T. Wada, A Remark on Regularity of Solutions to Wave Equations, Tokyo J. Math., 査読あり, 38 (2015), 505–512.

⑥ T. Wada, On solutions to nonlinear Schrödinger equations for special initial data, Electron. J. Differential Equations, 査読あり, 2015, No. 279, 1–6. http://ejde.math.txstate.edu

⑦ M. Nakamura, On the solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, Nonlinear dynamics in partial differential equations, 査読あり, 289–294, Adv. Stud. Pure Math., 64, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2015.

⑧ M. Nakamura, Energy solutions for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, 査読あり, Current trends in analysis and its applications, 203–208, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

⑨M. Ishiwata, M. Nakamura, H. Wadade, Remarks on the Cauchy problem of Klein-Gordon equations with weighted nonlinear terms, 査読あり, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015), 4889–4903.

⑩ M. Nakamura, On nonlinear Schrödinger equations derived from the nonrelativistic limit of nonlinear

Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, J. Differential Equations, **査読あり**, 259 (2015), 3366–3388.

⑪ M. Nakamura, Remarks on global solutions of dissipative wave equations with exponential nonlinear terms, Commun. Pure Appl. Anal. , **査読あり**, 14 (2015), 1533–1545.

⑫M. Nakamura, Remarks on a dispersive equation in de Sitter spacetime, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2015, Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl., **査読あり**, 901–905.

⑬M. Nakamura, Remarks on a weighted energy estimate and its application to nonlinear wave equations in one space dimension, J. Differential Equations, **査読あり**, 256 (2014), 389–406.

⑭M. Nakamura, The Cauchy problem for semi-linear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, J. Math. Anal. Appl., **査読あり**, 410 (2014), 445–454.

⑮M. Ishiwata, M. Nakamura, H. Wadade, On the sharp constant for the weighted Trudinger-Moser type inequality of the scaling invariant form, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **査読あり** 31 (2014), 297–314.

⑯N. Kita, Nonlinear Schrödinger equation with δ-function as initial data, Sugaku Expositions, **査読あり**, 27 (2014), 223–241.

⑰ T. Iwabuchi, M. Nakamura, Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equation, and the Keller-Segel system in Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Adv. Differential Equations, **査読あり**, 18 (2013), 687–736.

〔学会発表〕（計４件）

①T. Wada, Modified Strichartz estimates with applications to local well-posedness for nonlinear Schrödingier equations, 2016 **年** 6 **月** 8 **日，保存則と保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性,特異性および長時間挙動の研究（京都大学数理解析研究所，京都市）**

②T. Wada, Strichartz type estimates and applications, 2015 **年** 11 **月** 1 **日**, International Workshop on Mathematical Sciences in Dalian (Dalian University of Technology & Xinghai Golf Hotel, Dalian) **大連，中国**

③T. Wada, A modification of Strichartz estimates and applications to nonlinear Schrödingier equations with critical power nonlinearity, 2014 **年** 9 **月** 12 **日**, Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations **（大阪大学，大阪府豊中市）**

④和田健志，保存則と保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性,特異性および長時間挙動の研究（数理解析研究所）和田健志，平滑化効果と Maxwell-Schrödinger **方程式の大域的適切性，**2014 **年** 3 **月** 18 **日，日本数学会年会における特別講演（学習院大学，東京都豊島区）**

６．研究組織

(1)研究代表者

和田　健志（WADA TAKESHI）
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号：70294139

(2)研究分担者

中村　誠（NAKAMURA MAKOTO）
山形大学・理学部・教授
研究者番号：70312634

(3)
研究分担者

北　直泰（KITA NAOYASU）
熊本大学・大学院先端科学研究部（工）・教授
研究者番号： 70336056