2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６６０

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2015

課題番号：２５４００１８２

研究課題名（和文）発展方程式における同定問題の作用素半群理論的解明

研究課題名（英文）Semigroup-theoretic study of identification problem in evolution equations

研究代表者

岡沢　登（Okazawa, Noboru）

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：８０１２０１７９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：線形の放物型発展方程式の初期値問題$(d/dt)u(t)+\nu Au(t) = 0 (0<t<T)$, $u(0) = x$を考える．ここで$A-\omega (\omega>0)$はBanach空間内の角型極大増大作用素で，その係数$\nu>0$はパラメータである．この問題の一意解は $u(t) = \exp(-t\nu A)x$と書き下せてしまう．$\{\exp(-t\nu A)\}$は$-\nu A$によって生成される解析的縮小半群を表す．この解の一意存在性に，追加情報として解の終値$u(T)$のノルムが$\rho=\|\exp(-T\nu A)x\|$と測定できたとすると陰関数$\nu=\nu(x,\rho)$が一意に定まり，初期値xと終値のノルムρに局所Lipschitz連続的に依存する．

研究成果の概要（英文）：We are concerned with linear evolution equations of parabolic type $(d/dt)u(t)+\nu Au(t) = 0$ $(0<t<T)$, where $A-\omega$ $(\omega>0)$ is an m-sectorial operator in a Banach space X and the coefficient $\nu>0$ is a parameter. The theory of operator-semi-groups says that under the setting the unique solvability of the equation (with coefficient) is guaranteed. In fact, given an initial value $u(0) = x$ in X, a unique solution of the initial-value problem can be written as $u(t) = \exp(-t\nu A)x$, where $\{\exp(-t\nu A)\}$ is the analytic contraction semigroup generated by $-\nu A$. In identification problem we specify the coefficient ν by some additional information besides the unique existence of solutions. Measuring the norm $\rho=\|\exp(-T\nu A)x\|$ of the final value $u(T)$ as an additional information, we could have determined a unique implicit function $\nu=\nu(x, \rho)$ which depends on initial-value x and norm ρ locally Lipschitz continuously.

研究分野：数物系科学

キーワード：発展方程式　同定問題　作用素半群理論　角型極大増大作用素　双対性写像　フレシェ微分　陰関数定理　連鎖律

１．研究開始当初の背景

課題の元になった論文
[M] G. Mola, Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equations in Hilbert spaces, J. Abstract Differential Equations and Applications **2** (2012), 14-28
ではガレルキン近似法を使うので，陰関数定理は有限次元空間のもので間に合っていたが，半群理論で吉田近似を利用するときには，はじめから無限次元空間で考える必要がある．研究目的達成のための準備として，まずは有限次元空間における陰関数定理の証明として縮小写像の原理を利用するものを注意深く確認し，その議論が無限次元空間でも通用することは会得できていた．しかしフレシェ微分のことも微積分のレベルと劣微分作用素の関連でしか知らなかったから，陰関数定理が適用できるフレシェ微分の意味での C^1 級関数の典型例を見つけることができたのは幸運であった．その際，こんなことがと驚いたのは，Banach 空間 X におけるノルム $\|\cdot\|_X$ によって $f(x)=(½)(\|Bx\|_X)^2$ と書ける実数値関数のフレシェ微分が $B^*F(Bx)$となることもこれまでに使われた形跡がなかった(即ち，非線形解析の文献中に見つけられなかった)ことである．ただし，$B: X\to X$ は有界線形作用素，$B^*: X^*\to X^*$はその共役作用素で，$F: X\to X^*$は双対性写像なので $B^*FB: X\to X^*$ が連続写像になることを求めれば，X^*に一様凸性を仮定せねばならない．

２．研究の目的

この報告書を書く際の数式の記述環境は普段使いなれないものなので，かなり粗い表現にならざるを得ないことをお断りする．
　研究成果の概要にある通り，一方で１つの係数 ν を含む放物型発展方程式の初期値問題
$(d/dt)u(t)+\nu Au(t) = 0\ (0<t<T),\ u(0) = x \in X$
の解 $u(t) = \exp(-t\nu A)x$ に対して区間$(0,T)$での終値 $u(T) = \exp(-T\nu A)x$ のノルムが測定されたとする．その測定値 $\rho=\|\exp(-T\nu A)x\|_X$ から，陰関数 $\nu=\nu(x, \rho)$の存在とその可微分性を導くために(計算しやすい形の)3 変数関数 $\psi(x,\rho,\nu):=(½)(\|\exp(-T\nu A)x\|_X)^2-(½)\rho^2$ を導入し，この ψ がフレシェ微分の意味での C^1 級関数になることがいえればよい．
他方，2 つの係数を含む放物型発展方程式の初期値問題
$(d/dt)u(t)+\alpha Au(t)+\beta Bu(t)=0\ (0<t<T),\ u(0)=x$
では A, B は Hilbert 空間内の非負自己共役作用素に限定し，2 つの半群の可換性
$\exp(-t\alpha A)\exp(-t\beta B) = \exp(-t\beta B)\exp(-t\alpha A)$も仮定しないと議論は進まない．そのとき解は
$u(t)=\exp(-t(\alpha A+\beta B))x=\exp(-t\alpha A)\exp(-t\beta B)x$
と書ける．2 つの係数決定のための測定値は
$\varphi=\|A^{½}\exp(-T(\alpha A+\beta B))x\|_X$,
$\psi=\|B^{½}\exp(-T(\alpha A+\beta B))x\|_X$としたが，役に立つ(多変数の)大域的な逆関数(陰関数)定理は存在しないので図的な考察でしのぐことになった．大域的な結果に対する反例は
[H] 一松 信，解析学序説，下巻，裳華房，東京 (1963)
にも述べられているように古くから知られており，使い易い十分条件の開発は進んでいないように感じている．

３．研究の方法

前項２で見た通り，Banach 空間 X のノルム $\phi(x,\nu)=(\|\exp(-T\nu A)x\|_X)^2$ を ν のみならず x で微分しなくてはならない．これらのことは線形および非線形半群理論で必要になることであり，院生時代に学んだことも役に立った．その結果として解析的半群 $\exp(-t\nu A)x$ としては縮小的になるものを中心に扱った．このことは生成作用素 A でいえば，A が角型極大増大作用素に限定されることになる．
特に，フレシェ微分の概念は，その名前が知られている割に使える結果が少ないのではないかと感じられた．ここでは自力で何とかするより他に仕方がなかったわけである．

４．研究成果

　1 係数の場合についての結果は〔雑誌論文〕の[1](2016)として刊行できた．2 係数の場合についての結果は現在投稿中である．

初期値 $x\in X$ を固定したとき $t=T$ での測定値 $\rho=g(\nu)=\|\exp(-T\nu A)x\|_X$は，$\nu\in(0,\infty)$についての連続な減少関数であり，半群 $\exp(-t\nu A)$に対して$\|\exp(-T\nu A)\|_X \le e^{-\omega\nu T}\ (\omega>0)$がいえるので $g(0)= \|x\|_X >\rho_0>0=\lim_{\nu\to\infty}g(\nu)$のとき $\rho_0=g(\nu_0)$ (i.e. , $\nu_0=g^{-1}(\rho_0)$)となる連続な逆関数 g^{-1}が一意的に定まる($\rho_0\to\nu_0$ は中間値の定理)．このようなことが $x\in X$を変数に含めたときにも示したいわけである．ここに陰関数定理の出番がある．偏導関数の形がいくらかでも簡単になるように，項目２で述べた 3 変数関数
$\psi(x, \rho, \nu):=(½)(\|\exp(-T\nu A)x\|_X)^2-(½)\rho^2$ を採用する． ψ の定義域は
$Q(\rho_0):=\{(x,\rho,\nu);(x,\rho)\in A(X),\ \rho \ge\rho_0>0,\ \nu\in(0,\infty)\}$ とする．ここで A(X)は許容集合(Admissible set)である: $A(X):=\{(x,\rho) \in X \times (0,\infty);\ \|x\|_X >\rho\}$．そのとき証明の要点となる補題は次のように述べられる．

補題　A は角型極大増大作用素で，
$\mathrm{Re}(Au,F(u)) \ge \omega(\|u\|_X)^2,\ u \in D(A)$ を満たすものとする．そのとき $\psi \in C^1(Q(\rho_0))$となる:
(i) (ρ 導関数).
$(\partial\psi/\partial\rho)(x,\rho,\nu)=-\rho,\quad (x, \rho, \nu) \in Q(\rho_0)$.
(ii) (x 導関数).
$\nabla_x\psi(x,\rho,\nu)=\exp(-\nu TA^*)F(\exp(-\nu TA)x)$,
$(x, \rho, \nu)\in Q(\rho_0)$.
(iii) (ν 導関数).

$$(\partial\psi/\partial\nu)(x,\rho,\nu)$$
$$=-T\cdot\mathrm{Re}(A\exp(-\nu TA)x, \exp(-\nu TA)x)$$
$$<-\alpha T(\rho_0)^2 < 0, \quad (x,\rho,\nu) \in Q(\rho_0).$$

補題のおかげで陰関数 $\nu=\nu(x,\ \rho)$の存在とその x 導関数$\nabla_x\nu(x,\ \rho)$, ρ 導関数$(\partial\nu/\partial\rho)(x,\ \rho)$(これらの具体形は少し長目の分数になるので省略する)の $A(X), \rho \geq \rho_0>0$ 上での一様な評価が可能になり，例えば，$x(\cdot)\in C^1([0,1];X)$のとき合成関数についての主張 $\nu\circ x \in C^1[0,1]$が連鎖律(chain rule)に基づき証明される．こうして $\nu(x,\ \rho)$の$(x,\ \rho)$についての局所 Lipschitz 連続性の証明が完成する．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

[1] G. Metafune, N. Okazawa, M. Sobajima, C.Spina, Scale invariant elliptic operators with singular coefficients, Journal of Evolution Equations (to appear).

[2] Gianluca Mola, Noboru Okazawa, Jan Prüss, Tomomi Yokota,
Semigroup-theoretic approach to identification of linear diffusion coefficients, Discrete Continuous Dynamical Systems, Series S, **9** (2016), No.3 (June), 777-790 (査読有り).
DOI:10.3934/dcdss.2016028

[3] N. Okazawa, Motohiro Sobajima,
L^p-theory for Schrödinger operator perturbed by singular drift terms, Springer INdAM Series, **10** (2014), 401-418 (査読有り).
DOI:10.1007/978-3-319-11406-4_18

[4] 岡沢　登，複素Ginzburg-Landau方程式の作用素論，数学，**66** (2014), 275-297 (査読有り).

[5] N. Okazawa, M. Sobajima, T. Yokota, Existence of solutions to heat equations with singular lower order terms, Journal of Differential Equations, **256** (2014), 3568－3593 (査読有り).
DOI: 10.1016/j.jde.2014.02.011

[6] G. Metafune, N. Okazawa, M. Sobajima, T. Yokota,
Maximal sector of analyticity for C_0-semigroups generated by elliptic operators with separation property in L^{p}, Note di Matematica (Lecce), 33 (2013), 65－81 (査読有り).
DOI:10.1285/i15900932v33n2p65

[7] M. Sobajima, N. Okazawa, T. Yokota, Domain characterization for a class of second-order elliptic operators with unbounded coefficients in L^p, GAKUTO International Ser. Math. Sci. Appl. **36** (2013), 203－214 (査読有り).

[8] T. Suzuki, N. Okazawa, T. Yokota, Nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potential on bounded domains, GAKUTO International Ser. Math. Sci. Appl. **36** (2013), 237－245 (査読有り).

〔学会発表〕（計 4 件）

① N. Okazawa,
Semigroup-theoretic approach to identification of linear diffusion coefficients, (招待講演), International Conference on Inverse Problems and Related Topics, Seoul (Korea), 2016 年 6 月 27 日.

② N. Okazawa,
Another approach to Legendre type operator with degeneracy at the boundary (招待講演), New Advances in PDE's, Inverse Problems and Control Theory, University of Parma (Italy), 2015 年 7 月 8 日.

③ N. Okazawa,
Identification problem for an elliptic problem in Hilbert space － new observation (招待講演), PDE's, Control Theory and Inverse Problems, University of Bologna (Italy), 2014 年 9 月 17 日.

④ N. Okazawa,
Linear evolution equations of "hyperboloic" type in Hilbert space, Differential Equations, Inverse Problems and Control Theory, Cortona (Italy), 2013 年 6 月 21 日.

６．研究組織

(1) 研究代表者
岡沢　登（Okazawa Noboru）
東京理科大学・理学部第一部　教授
研究者番号：80120179

(2) 研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3) 連携研究者
横田 智巳（Yokota Tomomi）
東京理科大学・理学部第一部　准教授
研究者番号：60349826

吉井 健太郎 (Yoshii Kentarou)
東京理科大学・理学部第一部　助教
研究者番号：00632449

〔図書〕（計　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等