

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400188

研究課題名(和文) -統計力学における情報幾何構造の解明

研究課題名(英文) The information geometric structures on the kappa-generalized thermostatics

研究代表者

和田 達明 (Wada, Tatsuaki)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：00240549

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：-統計力学において基本的な確率分布である、 κ -指数型分布族に対する適切な共役表現を見出し、対応する統計多様体を具体的に構成した。また、情報幾何構造を特徴付ける拡張された情報計量、拡張されたアフィン接続やダイバージェンスなどの重要な諸量の表式を具体的に求め、双対平坦であることを示した。熱力学・統計力学において非常に重要であるMaxwell関係式と揺動応答関係が、双対平坦であるFisher計量の性質から導出できることを見出し、 κ -指数型分布に対して、揺動応答関係の κ -拡張版を得た。更に、関連するHesse構造を調べ、通常の期待値に加え、 κ -エスコート期待値の重要性を示した。

研究成果の概要(英文)：We found the conjugate representations for constructing the statistical manifold associated with a family of the kappa-generalized exponential distributions. We have obtained the explicit expressions of the kappa-generalized geometrical quantities (e.g, Fisher metric, affine connections, divergence functions) which characterize the information geometric structures. We also showed that the kappa-statistical manifold is dually flat, which is an important feature in information geometry.

From these results we derive a kappa-generalization of the fluctuation-response relations, and pointed out the importance of an escort expectation value in addition to the conventional linear expectation.

研究分野：統計力学の拡張

キーワード：-指数型分布 情報幾何 -エントロピ- ダイバージェンス 双対平坦 揺動応答関係

1. 研究開始当初の背景

- (1) 情報幾何学は甘利・長岡により創られ、パラメータで特徴付けられた確率分布族から構成された統計多様体上の affine 微分幾何学として記述され、推定・検定などの統計学や機械学習の分野における方法論のひとつとして応用・発展がなされてきた。統計多様体の情報幾何構造を特徴付ける重要な量としては、Fisher 計量、affine 接続、ダイバージェンスなどがある。情報幾何学の有用性は、指数型の確率分布族に対する統計多様体が双対平坦であるという重要な性質に起因しており、指数型分布族以外の確率分布に対しての拡張も試みられていた。
- (2) 一方、熱平衡状態を対象とする統計力学は、良く知られているように、指数型の確率分布を基本とする理論であり、指数型分布で記述される現象を良く説明できる。近年、指数型分布とは異なる自然界に良く現れる分布として、ベキ分布が注目されている。このベキ分布で表される現象を最大エントロピ原理に基づいて理解する試みとして、従来のエントロピを拡張した、一般化エントロピに基づくエントロピ最大原理 (MaxEnt) によるアプローチが提案された。そのような研究のひとつである Tsallis エントロピに基づく統計力学の拡張 (Tsallis 統計力学) に関する研究が進展し、注目され始めていた。
- (3) 情報幾何学と Tsallis エントロピに基づく統計力学の拡張とは、従来まったく異なる分野であり、両者の研究者が交流することは殆どなかった。しかしながら、両分野に共通する数学的構造が認識され始め、2009 年に京都で開催した国際ワークショップ「一般化エントロピの数理とその応用」を契機とし、互いの分野の研究に対する関心が高まっていた。特に、情報幾何学において重要な 幾何学と Tsallis 統計との関連について、研究の興味が高まっていた。
- (4) 本研究を開始する数年前程度前向きから、急速に Tsallis 統計力学に関する情報幾何構造の研究が進展し、両者に共通する仕組みが解明されてきており、Tsallis エントロピ以外の一般化エントロピに対しても、研究対象としての興味が高まってきた。統計力学は、自然界や理工学の分野で良く現れるベキ型の確率分布に対するアプローチとして近年提唱された、Tsallis 統計力学とは異なるタイプの、統計力学の 1 実数パラメータ拡張である。統計力学における通常のエントロピを 1 実数パラメータ () で拡張した α -エントロピを最大化する最適分布が α -指数型分布であり、漸近的ベキ特性を示す確率分布である。本研究は、この α -指数型分布族に対する情報幾何構造の解明を主

目的とした研究である。

2. 研究の目的

- (1) 本研究は、Tsallis エントロピとは異なるタイプの実数パラメータ拡張である、 α -エントロピに基づく統計力学 (α -統計力学) に関する平成 19-21 年度基盤研究 (C) の研究成果を発展させ、 α -統計力学に関する情報幾何構造を明らかにすることを目的とした研究である。
- (2) 具体的には、情報幾何学における従来の α -表現に替る、 α -指数型確率分布に対する適切な共役表現を見出し、 α -統計力学におけるポテンシャル関数の Legendre 構造に基づき、対応する Fisher 計量、接続係数、幾何的ダイバージェンスなどの情報幾何構造を明らかにすることを目指した理論的研究である。

3. 研究の方法

- (1) 情報幾何学の基本的な構成要素である統計多様体は、指数型確率分布族に対して表現を適用することで構成されている。この表現は、Tsallis 統計力学において重要となる q -指数型分布と相性が良く、 q -指数関数の逆関数である q -指数関数と表現を関連付けることが可能であった。しかしながら、 α -指数型確率分布へこの α -表現を適用することでは適切な統計多様体を得ることができないことが研究開始当初に既に判っており、研究を進める上での最初の問題点であった。この問題へのアプローチとして、Zhang が示した α -表現の概念を一般化した共役表現を利用することで、より広いクラスの確率分布族に対して統計多様体が構成できるのではと考え、研究を進めていった。先ず、研究当初に既に分かっていた α -エントロピや α -自由エネルギーなどの熱力学的ポテンシャル関数の間に成立する Legendre 構造に基づいて、 α -指数型確率分布族に対して適切な共役表現を試行錯誤により探っていった。
- (2) 平行して、先行研究として、Tsallis 統計力学に関する情報幾何構造が解明されていたので、それらの結果に基づいて熱力学的関数を求め、予想される α -統計力学に関する情報幾何構造を調べていった。特に、研究会や国際会議などで知り合った関連分野の研究者との議論を通じて、Tsallis 統計力学および α -統計力学における漸近的ベキ型確率分布族に対する統計多様体上での情報幾何構造についての理解を深めていけたことは、本研究を遂行する上でとても重要であった。
- (3) 上記の、 α -指数型分布族に対して適切な共役表現を見つけた後は、それを利用して α -指数型分布族に対する統計多様体を具体的に構成し、その微分幾何学的構造を特徴付ける幾何学量である計量・接続

係数・ダイバージェンスなどの 拡張された諸量の具体的な表式を見出し、それらの間に成立する関係を明らかにしていた。

4. 研究成果

- (1) 主な成果としては、先ず初年度に κ -指数型分布族に対する適切な共役表現を見出すことができたことと、更にその適切な共役表現を利用して κ -指数分布族に対する統計多様体を具体的に構成することに成功した点である。翌年度には、 κ -指数分布族から構成された統計多様体に関する情報幾何構造を特徴付ける重要な幾何学的量である、拡張されたフィッシャー情報計量、拡張されたアフィン接続やダイバージェンスなどのアフィン微分幾何学における重要な諸量の表式を具体的に求めることができた。また、それらの幾何学量に基づき、 κ -指数型分布族に対する統計多様体における情報幾何構造が、情報幾何学において重要である双対平坦構造であることを示すことができた点である。
- (2) κ -指数型分布に関する情報幾何構造を解明する過程において、熱平衡状態に対する熱力学・統計力学において非常に基本的かつ重要である Maxwell 関係式と、熱力学的な物理量の揺らぎと応答とを結び付ける関係式である、揺動応答 (fluctuation-response) 関係が双対平坦である指数型分布族に対する Fisher 計量の性質から導出できるという重要な事実気づき、その関係を利用して上記で得られた双対平坦構造を持つ κ -指数型分布における揺動応答関係の κ -拡張版を導出することができた。
- (3) 更に、関連するポテンシャル関数に対する Hesse 幾何構造を調べ、通常の期待値に加え、 κ -指数型分布に付随する κ -エスコート分布に関する期待値 (κ -エスコート期待値) が重要な役割を果たしていることが判明した。 κ -変形された指数型分布族に対して、従来の期待値に加えて κ -エスコート期待値が自然に付随 (κ -エスコート) することで期待値が 2 種類存在することになり、関連する情報幾何構造である Hesse 幾何構造も、それぞれの期待値に対して 2 種類の双対平坦構造が現れることが分かった。
- (4) 以上の研究成果をまとめ、国際会議および国内における学会、研究会などにおいて発表・議論を行い、学術論文として投稿し、掲載されている。(Entropy 誌掲載論文参照)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Tatsuaki Wada, Hiroshi Matsuzoe and Antonio M. Scarfone, "Dualistic Hessian Structures Among the Thermodynamic Potentials in the κ -thermostatistics", Entropy, 17(10), 7213-7229, 2015 査読有

Hiroshi Matsuzoe and Tatsuaki Wada, "Deformed κ -Algebras and Generalizations of Independence on Deformed Exponential Families", Entropy, 17(8), 5729-5751, 2015 査読有

Tatsuaki Wada and Antonio M. Scarfone, "Information Geometry on the κ -thermostatistics", Entropy, 17(3), 1204-1217, 2015 査読有

Antonio M. Scarfone and Tatsuaki Wada, "Legendre structures of κ -thermostatistics revisited in the framework of information geometry", J. Phys. A: Math. Theor., 47, 275002(17pp), 2014 査読有

Tatsuaki Wada and Hiroki Suyari, "The κ -generalizations of Stirling approximation and multinomial coefficients", Entropy, 15(12), 51444-5153, 2013 査読有

[学会発表](計 5 件)

和田 達明、『熱力学 情報幾何』、ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (7)、2015.9.1、北海道大学理学部 4号館501 (北海道・札幌)

和田 達明、Antonio M. Scarfone、『変形指数分布に基づく情報幾何構造』24pBL-1、日本物理学会 第70回年次大会、2015.3.24、早稲田大学 早稲田キャンパス (東京・新宿)

和田達明、Antonio M. Scarfone、『 κ -統計力学とその情報幾何構造』、Mini Workshop on Information geometry and statistical physics (情報幾何と統計物理に関するミニワークショップ)、2014.10.18、分子科学研究所 南実験棟 4階理論セミナー室 (愛知・岡崎)

T. Wada, Information Geometry On The κ -Thermostatistics, International Conference on Statistical Physics (2014)、2014.7.7-11、Sheraton Rhodes Resort Rhodes (Greece)

和田達明、Antonio M. Scarfone, 『一般化エントロピーに基づく統計力学の拡張とその情報幾何構造』、統計多様体の幾何学の新展開 (RIMS 共同研究)、2014. 2.19-21、数理解析学研究所(RIMS) 110 室 (京都・京都)

〔その他〕

ホームページ等

<https://info.ibaraki.ac.jp/Profiles/4/0000304/profile.html>

https://www.researchgate.net/profile/Tatsuaki_Wada

6. 研究組織

(1) 研究代表者

和田 達明 (WADA TATSUAKI)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：00240549

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し

(4) 研究協力者

Antonio M. Scarfone

トリノ工科大学・応用科学工学科・准教授