

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400189

研究課題名(和文)非正則な確率分布に関する逐次推定方式の構築

研究課題名(英文) Construction of sequential estimation procedures for nonregular probability distributions

研究代表者

小池 健一 (KOIKE, Ken-ichi)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：90260471

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、以下のような研究を行った。  
第一に、ベイズ推測において重要である客観事前分布の設定である。これは、事前分布と事後分布のalphaダイバージェンスを最大にするものとして定義するものである。正則な場合にはジェフリーズの事前分布が得られるが、それと同様であるが、フィッシャー情報量に類似した情報量から客観事前分布が得られた。  
第二に、ベイズリスクに関する情報不等式に関する研究である。よく知られたBorovkov-Sakhanenko, Brown-Gajekの不等式を改良するものである。また、歪正規分布を拡張し、歪q正規分布を得た。さらに、その確率分布に性質や統計的性質を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research we consider the following problems.  
First, in Bayesian estimation, it is very important to choose an objective prior distribution when little prior information is available. In this research we derived a non-informative prior which maximizes the alpha divergence between the prior and the corresponding posterior distribution for non-regular family of distributions whose support depends on unknown parameter. Secondly, lower bounds for the Bayes risk were obtained. The bounds improve the Brown-Gajek bound and the asymptotic expression is derived. As an application of the bound, lower bounds for the local minimax and Bayes prediction risk are also given. Furthermore, we generalized the skew-q-gaussian distribution by combining the skew distribution with the q-gaussian distribution. Recurrence formulae for the central moments were derived. The likelihood equation and Fisher information matrix were calculated. Moreover, the extreme value distribution was derived.

研究分野：数理統計学

キーワード：ベイズ推測 ダイバージェンス 情報不等式 歪正規分布

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

従来、逐次推定方式の良さを測る手段として、ウォルフォビッツの不等式が良く知られているが、有効な推定方式が得られるのは非常に希であって、殆どの場合には達成不可能であることがゴース、ステファノフ等によって示された。本研究代表者は、逐次の場合のバッタチャリヤ型の不等式を得て、ベルヌーイ試行の列に対してその達成について考察し、ウォルフォビッツの不等式の達成の場合との顕著な差異を示した。また、クラメール・ラオの不等式からベイズ推定方式のベイズリスクに対する下界が得られた。また、本研究代表者は、非正則な場合として、位置尺度母数をもつ一様分布について、その位置母数の逐次区間推定方式に関する結果を得た。この結果は、よく知られているチャウ・ロビンスの逐次区間推定方式に比べて、標本数に関して漸近的に次数が $(1/2)$ 乗で十分であり、漸近一致性、漸近有効性など優れた性質をもつことを示した。この結果は、逐次点推定方式にも拡張され、ロビンスの逐次点推定方式に比べて、密度関数の台の端点における0への収束の次数に応じて、標本数やリスクが漸近的に大幅に削減できることを示した。

### 2. 研究の目的

統計的推測理論において、予め標本数を固定してその標本に基づいて母数の推定問題を考えることが多いが、標本数を固定せずに適当な停止則を導入して、その停止則に基づく逐次的な標本抽出計画によって母数の逐次推定方式を考えた方がより現実的となる。通常は母集団分布に正則条件を仮定するが、本研究においては正則条件が必ずしも成り立たないような非正則な場合に焦点を絞り、有効(もしくは漸近的に有効)な逐次推測方式の構築を目指す。これまでの研究成果をもとに、(標本の最大値、最

小値を用いる)極値統計量を用いた推測のための基礎となる研究を行う。

### 3. 研究の方法

本研究では正則条件が必ずしも成り立たないような非正則な場合に焦点を絞り、有効(もしくは漸近的に有効)な逐次推測方式の構築を目指す。申請者がこれまでに研究してきた逐次推定方式は、分布の端点や幅などに関するものである。一方、分布の台の端点における収束の速さに関する推測問題などについては未知の部分が多い。これはいわゆる形状母数や裾指数といわれるものの推測問題であるが、一般的によく知られている最尤推定量やモーメント推定量が、そのままではうまく働かないことがこれまでの予備的な研究により分かってきている。そこで、これらの修正を行った推測方式を検討する。

### 4. 研究成果

統計的推測理論において、不偏推定量の良さを測るものとしてクラメール・ラオの不等式による不偏推定量に対する分散の下界がよく知られている。この下界は、正則条件を課すことでバッタチャリヤ型の不等式で精密化される。一方、ベイズ推定量に対しても、2乗誤差の下でベイズリスクの下界を与える不等式が、ポロフコフ・サハネンコ、ブラウン・ガジェクにより与えられている。これらはいずれもクラメール・ラオ型の不等式である。これに対して、Koike(2006)ではポロフコフ・サハネンコの不等式のバッタチャリヤ型の改良を行っている。本研究では、Hashimoto and Koike(2015)でブラウン・ガジェクの不等式のバッタチャリヤ型の改良を行った。

また、非正則な場合におけるダイバージェンスに基づいた無情報事前分布に関する研究を行った。ベイズ推測において事前分布の選択問題は古くからの重要問題であり、

今日に至るまで多くの議論がなされている。特に、事前に情報が無い場合には、一様分布が無情報分布として使われてきたが、不変性を持たないなどの欠点を持っていることが指摘されている。この問題に対応するため、例えば、ジェフリーズの事前分布がよく知られている。この事前分布を無情報事前分布として用いることは、バーナードなどによって、カルバック・ライブラーダイバージェンスを用いて正当化された。しかしながら、このダイバージェンスは台が未知母数に依存するような確率分布には適用できない。そこで、アルファ・ダイバージェンスを用いて無情報事前分布を導出した(Hashimoto and Koike(2016))。

これ以外にも、歪  $q$  正規分布を提案し、その分布の性質を示した(田崎, 小池(2016))。また、切断母数がある指数型分布族の最尤推定量について、その漸近展開を計算し、最尤推定量の性質を示した(Akahira et al.(2016))。対称な確率分布の拡張として、対数対称分布がある。これは逆数をとったものが、元々の確率分布と同じ確率分布に従うことで定義される。この自然な拡張として、指数対称分布やべき対称分布を提案し、平均、分散、メジアン、モード、分布関数、ハザード関数などの諸性質を調べた(石原, 小池(2017))。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計7件)

石原隆佑, 小池健一,  
exponential-symmetry and  
power-symmetry,  
京都大学数理解析研究所講究録, 査読無,  
2017,掲載予定

Hashimoto, S. and Koike, K.  
Non-informative prior with maximum  
divergence for non-regular Bayesian

estimation, International Journal of  
Applied and Experimental Mathematics,  
査読有, 印刷中

Akahira, M., Hashimoto, S., Koike, K.  
and Ohyauchi, N. Second order asymptotic  
comparison of the MLR and MCLE for a  
two-sided truncated exponential family  
of distributions, Communications in  
Statistics--Theory and Methods, 査読有,  
45,2016,pp.5637-5659,  
10.1080/03610926.2014.948202

田崎雅裕, 小池健一, Skew-q-gaussian  
distribution, 京都大学数理解析研究所講  
究録, 査読無, 1999,2016,pp.1-12,  
[https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp  
/dspace/bitstream/2433/224776/1/1999-0  
1.pdf](https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/224776/1/1999-01.pdf)

橋本真太郎, 小池健一,  
Reference prior based on a general  
divergence for multi-parameter  
non-regular models,  
京都大学数理解析研究所講究録, 査読無,  
1954,2015,pp.125-133,  
[https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp  
/dspace/bitstream/2433/224015/1/1954-1  
2.pdf](https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/224015/1/1954-12.pdf)

Hashimoto, S. and Koike, K.  
Bhattacharyya type information  
inequality for the Bayes risk,  
Communications in Statistics--Theory  
and Methods, 査読有,  
44,2015,pp.5213-5224,  
10.1080/03610926.2013.810265

橋本真太郎, 小池健一 ベイズリスクに  
関するバツタチャリヤ型情報不等式, 京都  
大学数理解析研究所講究録, 査読無,  
1860,2013, pp.1-8,  
[http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo  
/kokyuroku/contents/pdf/1860-01.pdf](http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1860-01.pdf)

〔学会発表〕（計5件）

橋本真太郎, 小池健一,

Reference priors with maximum divergence  
for multiparameter non-regular models,  
日本数学会年会, 明治大学, 2015年3月

橋本真太郎, 小池健一, Objective  
priors based on general divergence in  
non-regular case, RIMS 共同による研究会  
"New Advances in Statistical Inference  
and Its Related Topics", 京都大学, 2015  
年3月

橋本真太郎, 小池健一, 非正則な確率分  
布に対するダイバージェンス最大化による  
無情報事前分布について, 科研費シンポジ  
ウム「統計的推測の理論的基礎とその応用」,  
筑波大学, 2014年12月

赤平昌文, 橋本真太郎, 小池健一, 大谷  
内菜穂, Asymptotic comparison of the MLE  
and MCLE up to the second order for a  
two-sided truncated exponential family,  
日本数学会年会, 学習院大学, 2014年3月

根本大輝, 小池健一, 接合関数を用いた  
分布の極値従属性, RIMS 共同による研究会  
"Asymptotic Statistics and Its Related  
Topics", 京都大学, 2014年3月

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小池 健一 (KOIKE, Ken-ichi)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号: 90260471

### (2) 研究分担者

赤平 昌文 (AKAHIRA, Masafumi)

筑波大学・名誉教授

研究者番号: 70017424