様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５４００１９１

研究課題名（和文）部分構造への等質性を基軸とする単体的複体の構造解析

研究課題名（英文）Analysis of the structure of simplicial complexes based on the homogenity of substructures

研究代表者
八森　正泰（Hachimori, Masahiro）

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：００３４４８６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、単体的複体の構造に関するトポロジー的組合せ論の研究として、特に、部分構造への等質性が持つ構造を明らかにすることを目指した。特に、shellable, sequentially Cohen-Macaulay, partitionableというこの分野で重要な単体的複体の性質に関して、部分構造への等質性を要求した性質のもつ構造を主として調べた。主要な結果としては、h-triangleの非負性を緩和した条件を提案し、これに対して部分構造への等質性を要求する性質と上述の3性質との関係を明らかにしたこと、マトロイドの拡張としての視点を示唆するいくつかの結果を示したこと、などである。

研究成果の概要（英文）：This work studied, as one of the topics of topological combinatorics, the structures of simplicial complexes whose all substructures homogeneously have the same property. The main topic is related to shellability, sequentially Cohen-Macaulayness, and partitionability, and our interest is in the structures of simplicial complexes all of whose substructures hereditarily satisfy these properties. As one of our results, we proposed a new property that is a weak version of nonnegativity of h-triangles, and showed the relations between this property and the above three properties when hereditarity is required. We also discussed the hereditary property of shellability etc. can be seen as generalizations of matroids,

研究分野：組合せ論、離散数学、トポロジー的組合せ論

キーワード：単体的複体　shellable　Cohen-Macaulay　partitionable　マトロイド　トポロジー的組合せ論

１．研究開始当初の背景

本研究課題は、これは、組合せ論においてトポロジー的性質を利用する「トポロジー的組合せ論」という、世界的にも現在進展のある分野の研究（＜参考文献＞[1],[3]参照）において、特に単体的複体の組合せ構造を中心としたトポロジー的組合せ論の研究である。その中でも、本研究課題では、部分構造についての等質性を持つ性質の構造に着目することを中心課題として設定した。これは、本研究課題の前年度まで行っていた科学研究費・若手研究（B）の研究課題「単体的複体の部分構造および極小反例に基づく位相幾何学的組合せ論の研究」における研究の進展に触発されたことが直接の動機である。この研究においては、単体的複体のトポロジー的組合せ論において重要な概念である、shellability, sequential Cohen-Macaulayness, partitionability といった諸性質の極小反例の構造解析を主眼としていたが、これらの極小反例を持たない構造というのが本研究で中心に据えてクローズアップすることになる、部分構造に等質な構造を持つ単体的複体の重要な例になり、これらの性質を詳しく調べることが重要な知見をもたらすのではないか、と考えたことが本研究の出発点である。一方、「部分構造に等質である」という性質はマトロイドの理論やパーフェクトグラフの理論、グラフマイナー理論など、組合せ論における種々の場面において重要な組合せ構造の源流となっており、多くの重要な構造を作っている。このような背景から、本研究課題の課題設定が生じた。

２．研究の目的

上記のような背景から、本研究はトポロジー的組合せ論へこのような部分構造への等質性という視点を持ち込むことにより、新しい知見を開拓することを大きい目的とした。これに向けての個別の目的としては、まず、上述の本研究の前年度まで行っていた研究における成果である、shellability, sequential Cohen-Macaulayness, partitionability という単体的複体の 3 つの重要な性質に対する研究において、2 次元以下の場合にはこれらの 3 つの性質について頂点集合の部分集合への等質性を要求すると同じ性質になる、という大きい結果があり、3 次元以上については未解の状態となっている。これらの性質に関する部分構造への等質性の研究を通じてこの 3 次元以上の場合の解決に役立つような新たな知見を積み上げる、ということが目的の 1 つであった。また、これらの性質の部分構造への等質性はマトロイドの構造の一般化としての側面も持っており、この視点での研究を進めることも目的の 1 つとしていた。

３．研究の方法

本研究は、上述の前年度までの科学研究費研究課題「単体的複体の部分構造および極小反例に基づく位相幾何学的組合せ論の研究」で得られている諸結果およびそこから得られる情報を整理することから始め、まず、単体的複体の shellability, sequential Cohen-Macaulayness, partitionability に関して、頂点部分集合への制限についての等質性や、その低次元骨格における性質などについての知見を深めることを手掛かりとした。また、研究の進展の中で、マトロイド、ポセットマトロイド、などにおける関連構造について調べることも重要な手法となった。本研究は数学の理論研究であるため、幅広く諸文献に当たりつつ理論的な考察を行うことが研究手法ということになるが、その中で、研究を進める上での種々の仮説の検証や反例の探索において、計算機を用いた総調べや最適化の手法を用いた計算も重要な手法となった。

４．研究成果

本研究課題における最も主要な結果は以下の定理である。

定理：単体的複体において、以下の含意関係が成立する。

$$\begin{array}{ccc} & \text{hereditary-shellable} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{hereditary-sequentially Cohen-Macaulay} & & \text{hereditary-partitionable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{hereditary-SNNH} & & \Downarrow \\ & \searrow\quad \text{hereditary-SNNDH} \quad \swarrow & \end{array}$$

さらに、2 次元以下においては、これらの性質はすべて等価となる。□

ここで、hereditary-shellable, hereditary-sequentially Cohen-Macaulay, hereditary-partitionable の 3 つの性質は先述の shellability, sequential Cohen-Macaulay, partitionable に関する頂点集合の制限についての等質性の性質であるが、hereditary-SNNH および hereditary-SNNDH の 2 つは本研究で新たに導入し、提唱する概念である。これらは、h-triangle という単体的複体に付随する量の非負性に関して、頂点集合の制限およびリンクに関する等質性を要求する性質である。(両者の詳細な定義については 5 章の〔雑誌論文〕[2]を見られたい。) これまで、単体的複体が純、つまり、すべてのファセットの次元が等しい場合には、shellability, (sequential) Cohen-Macaulayness, および partitionability という性質は、単体的複体

の h-vector という量が非負であることを含意することがよく知られていた。しかしながら、これは単体的複体が純であるときの特殊な事情に依っており、単体的複体が純でない場合には h-vector の拡張である h-triangle を用いる議論が shellability および sequential Cohen-Macaulayness に関しては類似した議論が可能であることが知られていた（＜参考文献＞[2] 参照）ものの、partitionability についてはよく分かっていなかった。本研究における成果の一つである〔雑誌論文〕[2] においては、partitionability は h-triangle の非負性を含意しないのみならず、種々の困難な状態が生じ得るということを具体的に示した一方、h-triangle が条件を緩和した形での非負性を満たすことを示した。この条件が NNDH 条件(non-negative dominated h-triangle を持つという条件)であり、これを頂点集合の制限およびリンクについての等質性を持つように要求したのが hereditary-SNNDH（「S」は strongly の意で、リンクについての等質性を示している）という性質である。（hereditary-SNNH は、h-triangle が非負という性質に対して、頂点集合とリンクについての等質性を要求する性質である。）

この定理において重要なポイントは、hereditary-shellable からの含意関係が hereditary-sequentially Cohen-Macaulay と hereditary-partitionable に分岐してしまっているところを、新たに導入した hereditary-SNNDH が統合している、というところである。なぜこれが重要であるかというと、この構造により、hereditary-shellable と hereditary-SNNDH が等しいことが示せれば、その間にある性質もすべて一致することが自動的に示せることになる、ということである。実際、定理の主張の後半にある、2 次元以下では一致する、という主張はこれを利用している。2．「研究の目的」の項目に述べたように、本研究の念頭においている問題の一つに、hereditary-shellable, hereditary-sequentially Cohen-Macaulay, hereditary-partitionable の 3 つの性質が 2 次元以下では一致するが、3 次元以上ではどうなっているのか、という未解決問題がある。本定理において導入した hereditary-SNNDH はこの構造により、3 次元以上におけるこの問題に取り組む一つの手段を提供していると考えており、これが本研究の重要な成果の一つであるとする所以である。もちろん、2 つに分かれた hereditary-sequentially Cohen-Macaulay と hereditary-partitionable の両方から含意される性質を提示することは難しいことではなく、非常に弱い性質を持ってくればいくらでも可能である。しかしながら、あまりに弱すぎる性質を持ってきてしまっては、上の 3 性質が等しい場合でも、hereditary-shellable とその弱い性質が一致しないことが考えられ、この未解決問題への手段にはなりそうにない。一方、hereditary-SNNDH の場合は、2 次元以下では hereditary-shellable と等しいということが示せており、弱すぎることなく、ほどよい強さで統合する性質として役割を果たせそうであるということが示唆されており、この点も本成果の重要性の一端でもある。なお、この定理中のすべての性質が一致するのは、2 次元以下の他、flag complex という単体的複体のクラスでも一致することが期待される（先の結果での 3 性質の一致性がこのクラスに対しても示されているため）が、これについては証明ができていないものの、30 頂点以下の極小反例については一致することを確認しており、flag complex のクラスについてもすべて一致するものと思われる。これは計算機上で線形・整数計画ソルバーを用いて計算することによって確認を行った。この部分については５．〔学会発表〕[1]の国際学会での招待講演にて結果を報告している。

この他の成果としては、

(1) hereditary-shellable である単体的複体の低次元骨格の持つ構造についての議論
(2) shellability に関する議論のポセットマトロイド上での類似に関する議論
(3) 純でない単体的複体におけるマトロイド構造の拡張についての提案
(4) shellability についての付随するグラフの向き付け上の組合せ最適化問題による定式化に関する議論

などがある。(4)については、具体的な成果には至らず、取り組みとしての提案の段階にとどまるが、５．の〔雑誌論文〕[1]として出版した。(1)は本研究初期の出発点にあたる研究で、５．の〔学会発表〕の[12]～[17]で発表を行っている。 (2)および(3)は２．「研究の目的」で述べているように、本研究で課題としている部分への等質性を持つ単体的複体はマトロイドの拡張として見ることができ、その視点からの研究を提案することも本研究の目的の一つとしており、この意味で直接的にマトロイドの構造と絡めて議論を行ったのがこれらの成果である。特に(3)は、純でない場合のマトロイド構造として、各純骨格がマトロイドとなるという自然な要請をしたものに対して、マトロイド同様の公理系で記述できること、さらに、頂点集合の制限操作と類似するが少し異なる部分構造の取り方を新しく導入し、それを用いて部分構造への等質性を持つ単体的複体という形での特徴づけを与えることもできることを示しており、マトロイドの一般化としての視点を取り入れるという目的に合致する結果を与える形になったと考えている。５．の〔学会発表〕の[2],[10],[11]がこれらのマトロイド構造に絡んだ研究成果についての発表である。

＜参考文献＞
[1] A. Björner, Topological methods, in Handbook of Combinatorics, R. Graham, M. Grötschel and L.Lovász eds., North-Holland, 1995, 1819-1872.
[2] A. Björner and M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 1299-1327.
[3] D. Kozlov, Combinatorial Algebraic Topology, Springer-Verlag, 2008.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

[1] Masahiro Hachimori, Optimization problems on acyclic orientations of graphs, shellability of simplicial complexes, R.B. Bapat, S.K. Neogy and Dipti Dubey eds, “Mathematical Programming and Game Theory”(research monograph の１つの章), Springer-Verlag, 掲載予定.（査読あり）

[2] Masahiro Hachimori, Hereditary properties and obstructions of simplicial complexes, 京都大学数理解析研究所講究録, 1986 巻 (2016) 71-85.（査読なし）

〔学会発表〕（計 17 件）

[1] Masahiro Hachimori, Partitioning simplicial complexes and their h-triangles, International Symposium on Operations Research and Game Theory: Modeling and Computation, Indian Statistical Institute Delhi Centre, Delhi, India.

[2] 八森正泰, Nonpure な単体的複体におけるマトロイド構造の考察, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA2017)・離散数学とその応用研究集会 2017, 2018 年 8 月 17 日～2018 年 8 月 19 日, 熊本大学工学部.

[3] 八森正泰, 単体的複体、shelling と分割, 軽井沢グラフと解析研究集会, 2017 年 2 月 8 日～2017 年 2 月 10 日, 長野県佐久郡軽井沢町 日本大学軽井沢研修所.

[4] Masahiro Hachimori, Optimization on acycic orientations of graphs, shellability of simplicial complexes, and related topics, 2017 Symposium on Mathematical Programming and Game Theory, 2017 年 1 月 9 日～2017 年 1 月 11 日, Indian Statistical Institute Delhi Centre, Delhi, India.

[5] 八森正泰, 単体的複体の分割可能性と h-triangle, 日本応用数理学会 2016 年度年会, 2016 年 9 月 12 日～2016 年 9 月 14 日, 北福岡県北九州市小倉 九州国際会議場.

[6] Masahiro Hachimori, Hereditary properties of simplicial complexes and h-triangles, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2016 (JCCA2016), 2016 年 5 月 21 日～2016 年 5 月 25 日, 京都大学吉田キャンパス.

[7] 八森正泰, 単体的複体の分割、h-triangle と hereditary property, 日本数学会 2015 年度年会, 2016 年 3 月 16 日～2016 年 3 月 19 日

[8] 八森正泰, 単体的複体の遺伝的性質と h-vector の非負性, 2015 年度応用数学合同研究集会, 2015 年 12 月 17 日～2015 年 12 月 19 日, 龍谷大学瀬田キャンパス.

[9] 八森正泰, 単体的複体における hereditary property と obstruction, 平成 27 年度 RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」,2015 年 7 月 8 日～2015 年 7 月 10 日, 京都大学数理解析研究所.

[10] 八森正泰, マトロイドの拡張としての hereditary property, 研究集会「有限幾何と組合せデザイン」2015 年 3 月 6 日～2015 年 3 月 7 日, 東京理科大学神楽坂キャンパス.

[11] 八森正泰, 佐野良夫, Poset matroid と shellability, 組合せ論サマースクール 2014 (COS2014), 2014 年 9 月 3 日～2014 年 9 月 6 日, 山口県山口市かんぽの宿湯田.

[12] Masahiro Hachimori and Kenji Kashiwabara, Hereditary-shellable simplicial complexes and extendability of shellings, Japanese Conference on Combinatorics and Applications (JCCA2014), 2014 年 8 月 25 日～2014 年 8 月 29 日, 茨城県つくば市研究交流センター.

[13] 八森正泰, 柏原賢二, 単体的複体の Hereditary-shellability と vertex-decomposability, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 15 日～2014 年 3 月 18 日, 学習院大学.

[14] Masahiro Hachimori and Kenji Kashiwabara, Hereditary-shellable simplicial complexes and extendability of shellings, 25th Workshop on Topological Graph Theory (TGT25), 2013 年 11 月 28 日～

2013年11月22日，横浜国立大学．

[15] 八森正泰，柏原賢二，任意の制限がシェラブルな単体的複体とシェリングの拡張可能性，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，2013年9月24日～2013年9月27日，愛媛大学．

[16] 八森正泰，柏原賢二，任意の制限がシェラブルな単体的複体とシェリングの拡張可能性，組合せ論サマースクール 2013（COS2013），2013年9月2日～2013年9月5日，岩手県盛岡市ホテル大観．

[17] 八森正泰、柏原賢二，任意の制限がシェラブルな単体的複体におけるシェリングの拡張可能性， 組合せ論とその応用研究集会2013，2013年8月8日～2013年8月10日，山形市保健センター．

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

○取得状況（計0件）

６．研究組織

(1)研究代表者

八森　正泰（HACHIMORI，Masahiro）

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：00344862