

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：34404

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400201

研究課題名(和文) 不変性に基づく分布の拡張とロバストネス

研究課題名(英文) An extended class of distributions and its robustness based on group invariance

研究代表者

紙屋 英彦 (KAMIYA, Hidehiko)

大阪経済大学・経済学部・教授

研究者番号：50300687

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：群不変性の枠組みにおいて、一般的な分布族を導入した。この分布族は、標本空間への2つの群の作用に対応した2種類のパラメータを含む。この分布族の下で、不変な統計量の分布のロバストネスや、ある事前分布を用いた場合のベイズモデルに対する marginal equivalence と呼ばれる性質を考察した。またこの分布族の特殊ケースと見なせる星型分布に対し、推定問題に取り組んだ。具体的には、密度の等高線としての星型集合の形のノンパラメトリックな推定量を提案し、その性質を調べた。

研究成果の概要(英文)：We introduced a general class of distributions in the framework of group invariance. This class of distributions contains two kinds of parameters corresponding to two group actions on the sample space. We studied robustness of the distributions of invariant statistics and a property called marginal equivalence for the Bayesian model using a certain kind of priors. Moreover, we tackled the estimation problem for the star-shaped distribution, which is a special case of our model. Specifically, we proposed a nonparametric estimator of the shape of the star-shaped contours of the density and investigated its properties.

研究分野：数理統計学

キーワード：統計数学

1. 研究開始当初の背景

金融データや企業規模分布など現実のデータにおいては、歪みのある分布や裾の重い分布が観測されることが多い。このようなデータに対して正規分布を仮定することは無理があり、分布の歪みや裾の重さを扱える柔軟な分布族が必要とされる。多変量正規分布を拡張した楕円型分布族は、裾の重さを表現することができ、重要である。しかしこの楕円型分布族は、密度関数の等高線が楕円であることを保持したままであり、分布の歪みについては扱うことができない。

そこで研究代表者らは、楕円型分布族における楕円を一般の星型集合に拡張した「星型分布族」なるものを過去に提案した(Kamiya, Takemura and Kuriki (2008))。そして多変量正規分布や楕円型分布において成り立つ基本的な性質が、星型分布においてもそのまま成り立つことを示していた。

研究代表者らは、上述の論文で、群不変性の一般的な枠組みにおいて、クロスセクション型分布と呼ばれる分布族を導入し、統計量の分布のロバストネスなどに関する性質を考察した。実は星型分布は、その一般的な議論の典型例として考えられたものである。

星型分布については、本質的に同じと見なせるものが、Fernandez, Osiewalski and Steel (1995) によって v -球面分布という名で独立に提案されているが、そこにおいては、研究代表者らが行っていなかった観点からの考察もなされている。特に Fernandez らは、位置パラメータと尺度パラメータを導入し、ベイズ理論的な議論を展開して、 v -球面分布が marginal equivalence と呼ばれる性質をもつことを示している。

この議論は研究代表者らの枠組みで言えば、星型分布に位置パラメータと尺度パラメータを導入したモデルに関する結果と考えられる。しかし、これと本質的に同じ議論は、研究代表者らが展開した群不変性の枠組みでのクロスセクション型分布の一般論に、2つのパラメータを導入したものにおいても成り立つと予想された。

このように、本研究課題の申請時には、一般的なクロスセクション型分布に対して、パラメータの導入や、marginal equivalence などのベイズ理論的な議論の展開が期待されていた。またクロスセクション型分布自体も、様々な例に应用することを考えると、標本点の共変部分への密度の依存のさせ方の部分などにおいて、より一般的に拡張しておくことが望まれていた。また、ここでの一般的な分布族に関する結果を、星型分布以外に、ランダム行列の分布などへも幅広く应用することが、期待されていた。

Kamiya, Takemura and Kuriki (2008) の議論は、分布族の提案と、その分布論的性質の考察にとどまっていた。この分布族の特殊ケースである星型分布についても、研究はその分布論的な事柄に限られていた。しかし現

実への適用を考えれば、応用上特に重要な星型分布については、密度の等高線である星型集合の形の推定の問題を解決することが、強く望まれていた。

以上が、本研究課題の申請時における背景・研究の動機である。

2. 研究の目的

「研究開始当初の背景」で述べたように、研究代表者らは本研究開始までに、群不変性の一般的な設定においてクロスセクション型分布と呼ばれる分布族を定義し、その下での統計量の分布やロバストネスを考察してきた。そしてその一つの応用として、楕円型分布を拡張した星型分布なるものを導入し、その性質を調べてきた。

しかしこれまでの一般論には、分布族の拡張、パラメータの導入、ベイズ的議論などの点で、さらなる進展の余地が残されていた。本研究課題は、これらの新たな観点から一般論を進展させることを目的とした。

またこれらの一般論を、星型分布以外に、ランダム行列の分布などに幅広く応用することも目的とした。

さらに、星型分布においても、密度の等高線としての星型集合の推定などの問題が残されていた。本研究課題では、この星型分布の推定問題の解決も目指した。

以上が、本研究課題の申請時における当初の研究目的である。

3. 研究の方法

まず、分布族の拡張については、以下の方法を取る。標本空間にある群が作用するとき、かなり一般的な条件の下で、標本点はその作用に関して、(最大)不変部分と共変部分に分解される。密度関数がこのオービタル分解における共変部分にのみ依存するような分布を、クロスセクション型分布と呼ぶが、ここではこれを次のように拡張する。不変部分を変数とし、ここでの群に値を取るような任意の関数を考え、この関数と共変部分の積に密度が依存するような分布を考える。この関数が値として群の単位元を常に取る定数関数のとき、この分布はクロスセクション型分布となるが、一般にはクロスセクション型分布を拡張した分布になる。

パラメータの導入については、以下のように行なう。上述のオービタル分解をもたらしただ群の他に、標本空間に作用するもう一つ別の群を考える。そして標本点にこれら2つの群を作用させて得られる点の分布を考えることにより、2つの群の元をパラメータとしてもつ分布族を得る。

ベイズ的議論としては、以下のようにして、ロバストネスに関する marginal equivalence と呼ばれる性質が成り立つことを示す。まず上述のパラメータのうち、始めの群に対応するパラメータを局外パラメータとし、後の群に対応するパラメータを関心のあるパラメ

ータとする．そして局外パラメータの広義の事前分布として，適当な条件を満たす測度を想定する．そして関心のあるパラメータの事前分布は任意とし，それらのパラメータの事前分布は独立という設定で，観測値と興味あるパラメータの同時分布が，拡張されたクロスセクション型分布の密度ジェネレーターに依存せず，共通となること (marginal equivalence) を示す．

星型分布以外への応用については，以下のように行なう．一般的な枠組みにおいては，標本空間を多次元ユークリッド空間に取る必要もないので，ランダムベクトルの分布だけでなく，ランダム行列の分布にも応用できる．クロスセクション型分布自体の先に述べた拡張があるため，affine shape の分布の問題なども扱えるようになる．

星型分布の等高線としての星型集合の形の推定問題については，以下の方法を取る．まず，星型分布の下での通常方向ベクトルの分布の密度関数が，星型分布の星型集合の形を決める関数と一対一に対応する点に着目する．このことより，星型分布から得られた標本の方向ベクトルのデータから，方向ベクトルの分布の密度関数をノンパラメトリックに推定することで，星型分布の星型集合の形が推定できる．この推定方法の性質を理論的に調べるとともに，シミュレーションによる分析や実データへの適用を行なう．

4．研究成果

群不変性の一般的な枠組みの下で，クロスセクション型分布を以下の2つの点で拡張した分布族を提案した．まず，標本点のオービタル分解における共変部分のみに密度が依存する分布がクロスセクション型分布であるが，オービットごとに異なる元を共変部分に掛けたものに密度が依存してよい分布に拡張し，これにより，ここでの理論が適用可能な範囲を広げた．次に，オービタル分解をもたらした群の他に，別の群の作用も考え，これら2つの群の元をパラメータとして含む分布族とした．

上の分布族の下で，第二の群に対応するパラメータが単位元に対応するときに，第一の群の作用に関する最大不変量の分布を求め，それが密度ジェネレーターに依存しないという意味でロバストであることを示した．また，両方の群に対応するパラメータが一般の元に対応する場合であっても，両方の群の作用の下で不変な統計量の分布はロバストになることを示した．

またこの拡大された分布族の下で，2つのパラメータの事前分布が独立で，局外パラメータ (第一の群に対応) の事前分布が相対不変測度であるとしたベイズモデルにおいて，観測値と関心のあるパラメータ (第二の群に対応) の同時分布の密度カーネルを求め，marginal equivalence が成り立っていることを示した．これにより，関心のあるパラメータ

の事後分布も密度ジェネレーターに依存しないため，関心のあるパラメータに関する事後推測が密度ジェネレーターに依らずロバストになることが分かった．

ここで得られた marginal equivalence などに関する結果を，典型例である星型分布以外に，affine shape の解析や主成分分析に関する問題に適用できることを示した．

さらに，応用上最も重要な星型分布に関しては，推定問題にも取り組んだ．分布の歪みを表現するという星型分布導入の趣旨から考えて，最も重要な推定問題は，密度の等高線としての星型集合の形の推定である．ここでは，この問題が方向ベクトルの分布を求める問題に帰着できることを利用した推定量を提案した．そしてこの推定量が，ハウストルフ距離に関して強一貫性をもつことを証明した．さらにその推定量の振舞いをシミュレーションにより調べるとともに，実データへの適用も行なった．なお，実データへの適用の際には location の推定も必要となるが，ここでは location をモードと想定して事前に推定した．この点は，同時推定にするなどして，今後改良して行く必要がある．

星型分布という特殊ケースについては， v -球面分布など類似の研究も見られるが，群不変性の一般論の展開とその星型分布以外への応用は，他では見られない研究である．この一般論の展開により，ランダム行列などの統計モデルにおいても，統計量の分布のロバストネスや，marginal equivalence に関するベイズ的議論などが可能となった．また，本研究課題で提案した星型分布の等高線の形の推定量が，歪みや尖りのある現実のデータの解析において，広く用いられるようになることが期待される．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

Hidehiko Kamiya, A note on estimation of the shape of density level sets of star-shaped distributions, Communications in Statistics---Theory and Methods, to appear (出版年未定), 査読有．

Hidehiko Kamiya, A unified approach to marginal equivalence in the general framework of group invariance, Communications in Statistics---Theory and Methods, Vol.45, 2016, 6955-6968, 査読有．
<http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2014.972572>

[学会発表](計4件)

紙屋英彦, Estimation of the shape of density level sets of star-shaped

distributions, 科研費シンポジウム「統計科学の現代的課題」, 2017年1月29日, 金沢大学サテライト・プラザ.

紙屋英彦, A unified approach to marginal equivalence in the general framework of group invariance, 2015年度 統計関連学会連合大会, 2015年9月7日, 岡山大学 津島キャンパス.

Hidehiko Kamiya, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, Recent developments on geometric and algebraic methods in Economics, 2014年8月24日, Hokkaido University.

Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, Arrangements stable under the Coxeter Groups, The 3rd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting (IMS-APRM 2014), 2014年7月1日, Taipei.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

紙屋 英彦 (KAMIYA, Hidehiko)

大阪経済大学・経済学部・教授

研究者番号: 50300687