様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００２１２

研究課題名（和文）ガレルキン特性曲線有限要素法による数値解析の展開

研究課題名（英文）Development of numerical analysis by the Galerin-characteristics finite element method

研究代表者

田端　正久（Tabata, Masahisa）

早稲田大学・理工学術院・特任教授

研究者番号：３００９３２７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：特性曲線法と有限要素法を結び付けたガレルキン特性曲線有限要素法に基づき，流れ問題のための新しい数値計算スキームを開発した．これらのスキームでは，２次元では三角形１次要素，３次元では四角形１次要素をすべての未知関数に使っており，従来のスキームに比べて，計算量が大きく軽減されている．非圧縮粘性流を記述するナヴィエ・ストークス方程式やある粘弾性流を記述するオセーン型ペターリンモデルに対して，これらのスキームの数学的正当性，すなわち，収束性と誤差評価を示し，実際の数値計算でその有効性を確認した．

研究成果の概要（英文）：We have developed new numerical schemes for flow problems based on the Galerkin characteristics finite element method, which is a combination of the method of characteristics and the finite element method. In these schemes the triangular linear element for 2 dimension problems and the tetrahedron linear element for 3 dimension problems are employed for all unknown functions, which reduces much the computational amount compared to the conventional Galerkin characteristic scheme. We have shown the mathematical validity, the convergence and the error estimate, of the schemes for the Navier-Stokes equations describing the incompressible viscous flows and for an Oseen-type Peterlin model describing a visco-elastic flow. We also recognized the efficiency of the schemes by several numerical computations.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析　特性曲線有限要素法　収束性と安定性　圧力安定化法　ナヴィエ・ストークス方程式　オセーン方程式　粘弾性流体　風上要素選択法

１．　　研究開始当初の背景

(1) 国内外の研究動向と本研究の位置づけ

特性曲線法は一階偏微分方程式の解の構成方法としては古典的である．この方法は偏微分方程式の数値解法として Pironneau [1982, Numer. Math.], Douglas-Russell [1982, SIAM J. Numer. Anal.] らによって有限要素法と結びつけられた．これらは時間刻み１次精度スキームであったが，研究代表者は時間 2 次精度を作成した(Rui-Tabata[2002, Numer. Math.])．そこでは，それまで２次精度と思われていたスキームがそうでないことを指摘し，真に２次精度になるためには付加項が必要なことを示した．この付加項を用いた論文がこの後に続いた(Bermudez-Nogueiras-Vazquez[2006, SIAM J. Numer. Analy.]，同[2006])．研究代表者らは，質量保存性を維持するスキーム(Rui-Tabata[2010, J. Sci. Comput.])，集中質量近似を使うスキーム(Pironneau-Tabata [2010, Int. J. Numer. Meth. Fluids])の開発を行い，ガレルキン特性曲線有限要素法（ラグランジュ・ガレルキン法とも呼ばれる）の研究を続けている．

一方，流れ問題の数値解法に関する研究，特に，複数流体問題の数値解法に関する研究の現状は次のとおりである．ナヴィエ・ストークス方程式で記述される非圧縮粘性流れ問題に対する数値解法の数学的正当化は，Girault-Raviart[1986], Brezzi-Fortin[1991]などの体系化された書物を経て，有限要素法により得られている．残っている主要課題は，単一流体問題に関しては高レイノルズ数流れ問題や大規模計算への対応である．複数流体問題では課題が多い．気液二相流などの流体の数値計算は産業界の必要性があり，数多くの数値シミュレーションが国内外でなされているが，数学的に正当化された数値計算手法はまだ得られていない．本研究では，これらの問題に対してガレルキン特性曲線有限要素法を用いて問題の解決にあたる．

これらの研究において，元の偏微分方程式の十分に良い近似解になっている数値解（離散化問題を計算機で解いているので近似解になることは避けることができない）を生み出す数値計算スキームの作成と解析には，関数空間など数学的準備が必要である．数値スキームの正当性を考慮して数値解法の開発と解析に取り組んでいるグループは国内では非常に少ない．諸外国の中では米国，フランス，ドイツ，イタリア，スイスで研究が進んでおり，研究代表者はこれらの主要な研究機関の研究者と密接な連絡を取り合って相互の研究発展につとめてきた．実際，研究代表者は，2007 年福岡で「流れ問題のための数値手法の最近の発展」を主題にして上記５ケ国の研究者を含む国際会議を開催し，2009 年東京で開催された第 15 回「流れ問題の有限要素法」に関する国際会議ではオーガナイズドセッションを主催するとともに，これら諸外国の研究組織を訪問して研究討議をしてきた．

(2) 研究の着想に至った経緯

研究代表者は，従来から偏微分方程式の数値解析の研究に従事し，流れ問題の風上型有限要素近似(Tabata[1977, Memoirs. Numer. Math.], Baba-Tabata[1981, RAIRO])はこの分野の研究の先駆けであり，特性曲線有限要素近似（Rui-Tabata[2002, Numer. Math.])でも結果を得た．その後，特性曲線有限要素法の研究を進める中で，ガレルキン特性曲線有限要素法が，ある条件下では風上型有限要素法と同一になることを見出し，かつ物理的に自然な解法であるので，この方法を流体問題の数値解析に展開することが適している．

高レイノルズ数問題に対しては，特性曲線近似の持っている流体粒子の近似性，大規模計算の要請に対しては，風上近似にはない行列の対称性からくる計算量の減少が有効に働く．

また，研究代表者は表面張力が働く自由界面問題にも長年興味を持っており，この問題を取り扱うには自由境界表面で強い位相を導入することが自然であることを指摘していた (Tabata-Tagami[2000, SIAM J. Numer. Anal.])．しかし，流体が占める未知領域を安定に計算する方法を構成することは容易でなかったが，全領域を解析領域とし界面位置のみを移動する計算手法を採用し，表面張力の計算には有限要素法で自然に用いることができる弱形式を取り入れることにより，全領域でエネルギー安定性を調べることができるスキームを作成することに成功した．この手法は界面追跡法に分類される数値解法であり，数値拡散の影響を受けることなく，界面位置を鮮明に捉える事ができる特長を持っている．ガレルキン特性曲線法と結合すれば，３次元問題で計算量が増加しても，対称行列の枠内で解くことができるので実用的な計算スキームを得ることができる．

２．研究の目的

偏微分方程式を現実的に解くためには計算機による数値的解法が必須である．流れ問題における移流項の近似方法は，高レイノルズ数問題の難しさと関連し，歴史的に種々の発想のもとに研究開発がなされてきた．ガレルキン特性曲線有限要素法（ラグランジュ・ガレルキン法とも呼ばれる）は，近年，研究代表者らにより研究が進展した方法で，従来の風上型近似の長所を持つ物理的に自然な近似であること，質量保存性を維持することができること，最終的に解くべき連立一次方程式が対称となり大規模計算に適していることの特長を持つ優れた解法であることが調べられた．本研究では，この方法を用いて流体問題の数値解析に新しい展開を持ち込み，複数流体問題など今日，容易でないとされる問題に，数学的に正当化された数値解法を開発し，その解析を行うことを目的として

いる．

３．研究の方法

(1)　方法の概要

この研究の遂行は研究代表者が計算スキームの開発，解析から，計算まで，全体を見通して行った．計算の実行に当たっては，連携研究者と協力して行った．混相流問題に対して，研究代表者が発表したエネルギー安定有限要素スキームとガレルキン特性曲線有限要素法とを結合した新しいスキームを作成した．基礎となるナヴィエ・ストークス方程式に対して，圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素スキームを作成した．３次元問題を考慮して，三角形，四面体１次要素を用いている．これらの新しい計算スキームのエネルギー安定性を理論と数値計算の両面から解析した．理論解析では，従来のエネルギー安定有限要素スキームで開発した方法を特性曲線有限要素法に拡張して，新たに現れる項の評価を行った．数値計算を，新規に購入した並列計算用計算機で行いスキームの特性を捉え，理論へのフィードバックと理論結果の検証を行い，数値解の収束性について解析した．混相流問題で流体の併合，分離を伴う問題への拡張を行い，更に，ペターリン粘弾性問題にガレルキン特性曲線有限要素スキームの開発，数値計算と解析を行った．局所線形化流速を用いるガレルキン特性曲線有限要素法の開発，数値計算と解析も行った．

(2) 平成２５年度の方法

ナヴィエ・ストークス方程式の数値計算において，２次元問題では精度の良い流速２次，圧力１次の三角形要素を使っているが，３次元問題では，計算量の観点から，１次要素を流速，圧力に使うのが現実的である．そのために，単一非圧縮粘性流体問題のガレルキン特性曲線有限要素スキームを，２次元三角形，３次元四面体安定化１次要素を流速，圧力に用いて開発し，オセーン方程式とナヴィエ・ストークス方程式の誤差解析を行った．その数値計算を新たに購入した並列用計算機で実行し，理論との整合性，並列計算の有効性を調べた．連携研究者の野津は並列計算と３次元計算に経験豊富なので協力して計算を実行した．この体制は次年度以後も同様である．

複数流体からなる混相流問題として，気泡上昇問題の数値計算を行った．研究代表者が 2007 年に発表した複数流体に対するエネルギー安定有限要素スキームは，界面位置を時間発展問題として解く界面追跡法の一つであり界面位置が明確に定まる．したがって，いわゆる数値拡散の影響で界面が不明瞭になることはない．さらに，界面捕獲法に比べて，はるかに多くの節点を界面位置に配置することができるので界面位置が精確に計算でき，それから決まる表面張力の精度も高い利点がある．この方法とガレルキン特性曲線有限要素法との結合スキームにより，気泡上昇挙動の流体粘性比への依存性を数値的に調べた．

ガレルキン特性曲線有限要素法は流れ問題の強力な数値解法であるが数値積分に起因する不安定性がある．この弱点を克服するために，局所線形化流速を用いる有限要素スキームの開発を行い，移流拡散方程式に対して，理論誤差解析と計算機による数値的確認を行った．別の方法として，特性曲線差分法による理論解析と数値的確認も行った．

結果を応用数理学会，日本数学会と数値流体力学シンポジウムの国内学会と，スペインで開催された科学技術分野における連成問題の数値計算法に関する国際会議で発表した．

(3) 平成２６年度の方法

早稲田大学とドイツ・ダルムシュタット大学とが協働して実施している日独共同大学院プログラムに関連して，ドイツ・マインツ大学ルカコヴァ教授らと粘弾性問題の数値解析について共同研究を開始した．ペターリン粘弾性問題では流速と圧力に加え，新たな未知関数として配座テンソルが加わる．その方程式系を数値的に解くために，ルカコヴァ教授らと議論を重ね，有限要素スキームの開発と数値計算に着手し初期的な結果を得た．

ナヴィエ・ストークス方程式と熱方程式が連成している自然対流問題に１次要素圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素法の誤差解析と数値計算を行った．

局所線形化流速を用いるガレルキン特性曲線有限要素法をナヴィエ・ストークス方程式に適用し誤差解析と数値計算を行った．

これらの結果を，計算工学会，日本数学会，韓国で開催された国際数学者会議，中国での日中韓数値数学合同会議，イタリアでの工学計算技術国際会議で発表した．

(4) 平成２７年度の方法

昨年度に引き続き，オセーン型ペターリン粘弾性問題の数値解析に取り組み，1 次要素圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素法で収束性を示すことができる陰解法を開発し，誤差解析とその数値計算を行った．この結果は，配座テンソル方程式に拡散効果がないときにも適用できる．

他の研究成果と共に，計算工学会と日本応用数理学会，ブルガリアでの工学と自然科学における数学の応用国際会議，チリでの偏微分方程式の数値解析ワークショップで発表した．

(5) 平成２８年度の方法

オセーン型ペターリン粘弾性問題の数値解析で，1 次要素圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素法で収束性を示すことができる陽解法を開発し，誤差解析とその数値計算を行った．この結果は３次元問題にも適用できる．

他の研究成果と共に，日本数学会，日本応用数理学会，オーストラリアで応用数学豪・ニュージーランド会議で発表した．

４．　　研究成果

(1) ナヴィエ・ストークス方程式のための圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素計算スキームの開発

ガレルキン特性曲線有限要素法は，特性曲線法と有限要素法の結合解法である．高レイノルズ数問題に対して強靭性を維持し，かつ，解くべき連立一次方程式が対称であるという，優れた方法である．我々は，計算の軽量化，特に，3 次元問題を意識して，流速，圧力の両方に三角形（四面体）1 次要素を使う圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素スキームを開発した．まず，オセーン方程式で，時間 1 次精度スキームの収束性を示し（雑誌論文⑤），ナヴィエ・ストークス方程式でも収束性を示した（雑誌論文③），更に，その結果を時間 2 次精度に改良し，ナヴィエ・ストークス方程式に対して収束性を証明した（学会発表③）．この改良により，より大きい時間刻みを取っても近似精度が維持され，計算精度を保って計算時間の効率をあげることができるようになった．ガレルキン特性曲線有限要素法の収束性が圧力安定化法で初めて示された結果であり，今後，理論的にも数値計算でも，広く使われるであろう．

(2) 複数流体の自由境界問題の数値解析

各流体は異なる粘性と密度を持ちナヴィエ・ストークス方程式に支配され，界面で曲率に比例する張力が働いている．界面はその位置にある粒子の速度で移動する．この問題にガレルキン特性曲線有限要素法を導入して，物質微分項の非線形性を解消し，自由境界は界面追跡法で精度良く計算し，表面張力は有限要素法の弱形式に基づいて求める．さらに，自乗可積分性を保持する工夫を加えた（学会発表⑧⑦）．このようにして得られたスキームはエネルギーの意味で安定性が判定できる数学的に正当な計算法であるだけでなく，疎な要素分割でも精度良く表面張力を計算することができる．さらに，対称行列しか現れない効率性の高い実用的なスキームである．これらの観点から開発されたスキームは今まで存在しない．このスキームを気泡上昇問題に適用した．外部流体の粘性を下げていくと上昇する気泡が振動する現象を捉えることができた（学会発表⑥⑤）．これは，円柱周りの流れでレイノルズ(Reynolds)数を上げていくとカルマン(Karman)渦列ができることに対応する現象である．密度の異なる 3 つの気泡上昇問題の数値シミュレーションも行った．

(3) 粘弾性流体の数値解析

ビニールなどの高分子物質は粘性と弾性の両性質を持ち合わせており粘弾性流体と呼ばれる．ナヴィエ・ストークス方程式は粘性流体の運動を記述し未知関数は流速と圧力であるが，粘弾性流体を記述する代表的な方程式は，配座テンソルを未知関数として加えたオルドロイド-B 方程式である．この方程式の大域解の存在は未解決で，その数値解析も非常に限られた結果しか得られていない．我々は，付加応力テンソルと配座テンソルがある非線形関係で表現されるペターリン粘弾性モデルの数値解析を行った．解析の手始めとして，流速場が既知であるオセーン型モデルに対して，圧力安定化ガレルキン特性曲線有限要素近似を用いたスキームを開発し，有限要素解が厳密解に収束することを示した．スキームは安定化ガレルキン特性曲線有限要素法の特長であるところの，移流が支配的な状況での強靭性とすべての未知関数の１次要素近似を維持している．これらの結果は，オセーン型であることを除いて，一般的な枠組みで粘弾性問題の数値解析に成功した斬新なものである（雑誌論文①，学会発表④）．

(4) 数値積分を必要としない特性曲線スキームの開発

ガレルキン特性曲線有限要素法は流れ問題の数値解法として強力な手法であるが，数値積分に起因する誤差で不安定になることが知られている．それを解消するために，局所線形化流速を導入して，移流拡散方程式とナヴィエ・ストークス方程式に対して，収束性を証明した（雑誌論文④②）．数値積分を用いない他の方法として差分法でも安定なスキームを作成し収束性を証明した（雑誌論文⑥）．局所線形化流速の導入により，理論的に証明された数値結果をガレルキン特性曲線有限要素法が提供することが初めて保証されるようになり，その意義は大きい．

(5) ナヴィエ・ストークス方程式に対する風上要素選択スキームの収束証明

風上要素選択スキームは高レイノルズ数に有効な計算法として使われてきたが，ナヴィエ・ストークス方程式に対して，その収束性が証明できていなかった．このスキームはガレルキン特性曲線有限要素スキームと，ある条件の下で同等になることに注目し，収束性を示すことに成功した（学会発表②①）．風上要素選択法とガレルキン特性曲線有限要素法との相互関係が明らかになり，今後の発展が期待できる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① M. Lukacova-Medvid'ova, H. Mizerova, H. Notsu, and M. Tabata. Numerical analysis of the Oseen-type Peterlin viscoelastic model by the stabilized Lagrange-Galerkin method; Part I: A nonlinear scheme. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 印刷中. DOI: 10.1051/m2an/2016078. 査読有.

② M. Tabata and S. Uchiumi. An exactly

computable Lagrange-Galerkin scheme for the Navier-Stokes equations and its error estimates. Mathematics of Computation, 印刷中. DOI: https://doi.org/10.1090/mcom/3222. 査読有.
③ H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange-Galerkin scheme for the Navier-Stokes equations. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 50, pp. 361-380, 2016. http://dx.doi.org/10.1051/m2an/2015047. 査読有.
④ M. Tabata and S. Uchiumi. A genuinely stable Lagrange-Galerkin scheme for convection-diffusion problems. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 33, pp. 121-143, 2016. http://link.springer.com/article/10.1007/s13160-015-0196-2. 査読有.
⑤ H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized chaacteristics finite element scheme for the Oseen equations. Journal of Scientific Computing, Vol. 62, pp. 940-955, 2015. Published online: DOI:10.1007/s10915- 015-9992-8. 査読有.
⑥ H. Notsu, H. Rui, and M. Tabata. Development and L2-analysis of a single-step characteristics finite difference scheme of second order in time for convection-diffusion problems. Journal of Algorithms & Computational Technology, Vol. 7, No. 3, pp. 343-380, 2013. http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1260/1748-3018.7.3.343. 査読有.

〔学会発表〕（計 32 件）
① 田端正久. ナヴィエ・ストークス方程式のための風上要素選択スキームの収束性. 日本数学会 2017 年度年会. 首都大学東京(八王子市), 2017 年 3 月 26 日.
② M. Tabata. Equivalence of upwind-element choice method and Lagrande-Galerkin method. 53rd Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Conference. Hahndorf (Australia), 2017 年 2 月 6 日.
③ M. Tabata. Some applications of the Lagrange-Galerkin method in flow problems. Fifth Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations. Concepcion (Chile), 2016 年 1 月 14 日.
④ M. Tabata. A pressure-stabilized Lagrange-Galerkin scheme for an Oseen-type Peterlin model. European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications. Ankara (Turkey), 2015 年 9 月 17 日.
⑤ M. Tabata. Numerical simulations of two-fluid flow problems by an energy-stable Lagrange-Galerkin scheme. Seventh International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena(Bulgaria), 2015 年 7 月 2 日.
⑥ 田端正久. 混相流の数値解析. 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会. 広島大学(東広島市), 2014 年 9 月 27 日.
⑦ M. Tabata. Energy-stable Lagrange-Galerkin finite element schemes for two-fluid flow problems. The 5th China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics. Yinchuan (China), 2014 年 8 月 26 日.
⑧ M. Tabata. An energy-stable Galerkin-characteristics interface-tracking scheme for two-fluid flow problems. The 5th International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering. Santa Eulalia(Spain), 2013 年 6 月 19 日.

〔図書〕（計 1 件）
① 田端正久, コロナ社, 応用数理ハンドブック, 2013 年, 8 頁 (分担執筆 3 項目執筆, 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顕(編)).

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
田端 正久 (TABATA, Masahisa)
早稲田大学・理工学術院・特任教授
研究者番号：30093272

(2)研究分担者
なし （ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
野津 裕史（NOTSU, Hirofumi）
金沢大学・理工研究域数物科学系・准教授
研究者番号：00588783

(4)研究協力者
なし （ ）