様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００２１３

研究課題名（和文）実数の特異集合に関するScheepers予想へのPixley-Roy超空間の応用

研究課題名（英文）Applications of Pixley-Roy hyperspaces to Scheepers' conjecture on special subsets of reals

研究代表者
酒井　政美（SAKAI, MASAMI）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：６０２１５５９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：実数の特異部分集合と各点収束位相をもつ関数空間における連続関数の準正規収束との関係に関するScheepers予想をPixley-Roy超空間の観点から解決を試みた。結果として主に次のような成果を得た。(1) Pixley-Roy超空間PR(X)が開被覆に関する性質weak urewicz propertyをみたすためのXに関する必要十分条件を与えた；(2) 「Lindelof空間はweakly Mengerの性質を満たすか？」というScheepersの問題に対して反例を与え、副産物として「Lindelof空間はMenger空間を稠密に含むか？」というWingersの問題にも反例を与えた。

研究成果の概要（英文）：Concerning Scheepers’ conjecture on special subsets of the real line and pseudo-normal convergence of continuous functions in a function space Cp(X) with the topology of pointwise convergence, we tried to answer the conjecture in view of Pixley-Roy hyperspaces. As a result, we obtained the following。(1) we gave , for a Pixley-Roy hyperspace PR(X), a sufficient and necessary condition for PR(X) to be weakly Hurewicz; (2) we answered, in the negative, Scheepers' question "Is every Lindelof space weakly Menger?", and as a byproduct, we answered, also in the negative, Wingers' question "Does every Lindelof space have a dense Menger subspace?".

研究分野：集合論的位相幾何

キーワード：Pixley-Roy hyperspace

１．研究開始当初の背景

M. Scheepers (集合論；Boise Univ. USA) は、実数の特異部分集合に関する研究の過程で、実数の部分集合 X が開被覆(open covering)に関する位相的性質 $S_1(\Gamma,\Gamma)$ を満たせば、X 上の連続関数全体に各点収束位相を入れた関数空間 Cp(X)が sequence selection property とよばれる局所的性質を満たすことを示し、実数の部分集合の特異な位相的性質と関数空間 Cp(X)の自然な位相的性質との関係を与えた。この逆が成立するかは多くの研究者により調べられているが、未解決のまま残り Scheepers 予想とよばれている。研究開始当初には、主に次の事柄が知られていた。

（１） Scheepers 予想は Laver の集合の model の中では正しい(2008 年)。これは、A. Dow, L. Bukovsky 及び研究代表者の研究結果を組み合わせることで導かれる。このことから、Scheepers 予想の反例を構成しようとする場合、ある種の公理の仮定が必要になる。ただし、通常の集合論の公理系 ZFC のなかで Scheepers 予想が正しい可能性は依然として残っている。

（２）位相空間Xが開被覆(open covering)に関する位相的性質 $S_1(\Gamma,\Gamma)$ を満たす必要十分条件をX上の上半連続関数列の準正規収束に関する性質(wQN*)で与えることができる(2009 年)。この特徴付けは、Bukovsky の結果、及び研究代表者が Bukovsky の問題を解決することにより得られた。

（３）各点収束位相を入れた関数空間 Cp(X) における the Ramsey property と sequence selection property (=SSP) との関係について、Cp(X) の the Ramsey property は Arhangel’skii の性質($\alpha 2$)と同値であることが示されている(2010 年)。

２．研究の目的

本研究では、研究代表者の過去３年間の科研費交付期間中の研究成果（特に、Pixley-Roy 超空間に関する成果）を活用発展させ、Scheepers 予想及び関連する諸問題を Pixley-Roy 超空間の位相的性質の問題と捉えて解決を目指すことが目的である。関連して、以下の問題の研究も目的である。

（１）実数の部分集合Xが開被覆(open covering)に関する位相的性質 $S_1(\Gamma,\Gamma)$を満たす必要十分条件となる Pixley-Roy 超空間 PR(X)の位相的性質は何か？ Xが開被覆に関する性質(P)を満たす必要十分条件となる Pixley-Roy 超空間 PR(X)の位相的性質は何か？

（２）集合論における強制法(forcing)や elementary submodel を利用して、開被覆(open covering)に関する位相的性質 $S_1(\Gamma,\Gamma)$を満たさない実数の部分集合の新しい構成法は？

（３）開被覆(open covering)に関する位相的性質 $S_1(\Gamma,\Gamma)$に近い開被覆に関する性質(Menger,Hurewicz 等)を実数の部分集合Xが満たす必要十分条件となる Pixley-Roy 超空 PR(X)の位相的性質は何か？

（４）Cp(X)が sequence selection property (=SSP)を満たせば、Xは研究代表者と大田氏が導入した位相的性質 (USC)s を満たすか？

３．研究の方法

研究代表者と連携研究者の大田氏(静岡大)は Scheepers 予想を肯定的に解決する立場で、実数の部分集合の開被覆に関する性質及び Pixley-Roy 超空間での対応する位相的性質を研究した。大田氏とは過去 3 年間の科研費交付期間中に Scheepers 予想を“準正規収束する上半連続関数列の問題”と捉え直して解決するための共同研究を行っており、この方向での研究も継続して行う。また連携研究者の嘉田氏(大阪府立大)は、集合論の強制法(forcing)や elementary submodel の手法を使うことで、Scheepers 予想の反例を構成する立場で研究代表者と共同研究を行った。計画を進めるには関係する国内外の研究者との継続的な意見交換が必要であり、各年度とも研究経費の多くは研究集会への出席、研究打ち合わせの旅費として使用された。国外ではこの予想を提起した Scheepers 氏(Boise Univ. USA)と研究の現状と方向性について意見交換することを計画していたが、これについては実現できなかった。

４．研究成果

研究目的である Scheepers 予想の解決には至らなかったものの、周辺の多くの未解決問題を解決した。具体的には以下の通りである。

（１）関数空間 Cp(X)の局所的性質を調べるため、strong Whyburn property の概念を導入し、位相空間 X と収束点列との積空間が Whyburn property をもつための必要十分条件は X が strong Whyburn property を満たすことであることを示した。その応用として、Cp(X)が Whyburn property を満たせば、the sequential fan は Cp(X)に埋め込めないことを示し、未解決問題を解決した。また、位相空間 X が任意の Whybun 空間との積が Whhyburn 空間となる必要十分条件は X が離散空間であることを示した。

（２）A. Dow と J. Moore は、カントル集合 K に対して、K 上の Pixley-Roy hyperspace PR(K)は tightness が可算のコンパクト化をもたないことを証明した。この結果を動機と

して一般にどのような位相空間上のPixley-Roy hyperspaceがtightnessが可算のコンパクト化をもつかどうかを調べた。結果として、Pixley-Roy hyperspaceがtightnessが可算のコンパクト化をもつための必要十分条件は、そのPixley-Roy hyperspaceがCorsonコンパクト化をもつことであることを示した。特に、距離空間Mに対して、PR(M)がtightnessが可算のコンパクト化をもつための必要十分条件は、Mがσ-discreteであることを示した。また、可分な線形順序位相空間Lに対して、PR(L)がtightnessが可算のコンパクト化をもてば、Lは可算濃度であることを示した。これらの結果はA. DowとJ. Mooreの結果を含む形になっている。

（３）Kocinacにより導入されたMenger propertyより弱いselection principlesの一つであるであるstrong star-Menger propertyとstar-Menger propertyについて研究を行い、strong star-Menger propertyにおいて閉離散部分空間の濃度は高々連続体濃度であることを示し、Songの問題を解決した。また、Pixley-Roy hyperspace PR(X)がstar-Mengerであれば、Xの任意有限積はMengerとなることを示し、Menger propertyとの密接な関係を示した。

（4）M. Scheepers氏と共著で現時点までに得られている重要な結果を中心として、selection principlesの分野の概要を「The ombinatorics of Open Covers」という論文名でK.P. Hart, J. van Mill and P. Simon編集の元で学術書「Recent Progress in General Topology III」において与えた。

（5）selection principlesの分野におけるBabinkostova, Pansera, Scheepersのいくつかの問題を解決した。具体的には、Lindelof空間でweakly Mengerでない空間が存在すること、及びMenger空間でプレーヤーIIが位相ゲームGfin(O,D_0)で必勝法をもたない場合があることを示した。初めの結果はWingersのLindelof空間はMenger　稠密部分空間をもつかという問題の反例にもなっている。

（6）P. Danielsはvan Douwenのある問題を解決する過程で、Pixley-Roy hyperspace PR(X)がweakly MengerであればXの任意有限積はMenger propertyを満たすこと、及び距離空間Xではこの逆が成立することを示した(1988年)。この研究を動機として、Menger properyより強いHurewicz propertyについてweak Hurewicz propertyの概念を導入して、Pixley-Roy hyperspace PR(X)がweakly HurewiczであればXの任意有限積はHurewicz propertyを満たすこと、及び距離空間Xではこの逆が成立することを示した。他に、σ-productのMenger propertyやHurewicz propertyについての結果やKocinacの提出した問題に対する否定解を与えた。

（7）位相空間に対する局所的性質の一つであるtight性について、可算部分集合からなるπ-networkに関する位相的性質であるsupertight性を導入し、Pixley-Roy hyperspace PR(X)がtightであるための必要十分条件はXがsupertight性を満たすことであることを与えた。また、supertight性を満たす位相空間の基本的な性質についてもいくつかの結果を得た。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　８件）

① M. Sakai, Notes on strongly Whyburn spaces, Comment. Math. Univ. Carol. 査読有 57 (2016) 123--129. DOI:10.14712/1213-7243.2015.139
② M. Sakai, A. Bella, Compactifications of a Pixley-Roy hyperspaces, Topol. Appl.査読有 196(2015) 173--182. DOI:10.1016/j.topol.2015.09.041
③ M. Sakai, Star versions of the Menger property, Topol. Appl. 査読有 176(2014) 22--34. DOI:10.1016/j.topol.2014.07.006
④ M.Sakai, M.Scheepers,The ombinatorics of Open Covers, Recent Progress in General Topology III, K.P. Hart, J. van Mill and P. Simon editors, 査読有 2014, pp. 751--799. DOI:10.2991/978-94-6239-024-9_18
⑤ M.Sakai, Quotient maps onto submaximal spaces, Topol. Appl. 査読有 164(2014) 248--258. DOI:10.1016/j.topol.2014.01.010
⑥ M.Sakai, Some weak covering properties and infinite games, Cent. Eur. J. Math. 査読有,12(2014) 322--329. DOI:10.2478/s11533-013-0343-4
⑦ M. Sakai, The weak Hurewicz property of Pixley-Roy hyperspaces, Topol. Appl. 査読有,160(2013) 2531--2537. DOI:10.1016/j.topol.2013.07.047
⑧ M. Sakai, A. Bella, Tight points of Pixley-Roy hyperspaces, Topol. Appl. 査読有,160(2013), 2061--2068. DOI:10.1016/j.topol.2013.08.009

〔学会発表〕（計　５件）

① 酒井政美, Monotonically Lindel\"of spaces, a survey and recent results I, II,The 6-th workshop on topology in Zhanzhou, PR China, 2016年8月2, 3日（招待）.

② 酒井政美, Remarks on monotonic covering properties, 1-st Pacific International Conference on Topology and Applications, Minnan University, Zangzhou, PR China, 2015年11月27日(招待).
③ 酒井政美, The Menger property, function spaces and the sequential fan, International Conference on Topology in Messina 2015, Messina University, Italy, 2015年9月10日(招待).
④ 酒井政美, Notes on strongly Whyburn spaces, 2014 International Conference of Honam Mathematical Society, Chosun University, 大韓民国, 2014年6月27日(招待).
⑤ 酒井政美, Tight points of a Pixley-Roy hyperspace, International Conference on Topology and Geometry 2013 joint with the Sixth Japan-Mexico Topology Symposium (島根大学), 2013年9月3日（招待）.

６．研究組織

(1)研究代表者
酒井　政美（SAKAI Masami）
神奈川大学・理学部・教授
研究者番号：60215598

(2)研究分担者
( )
研究者番号：

(3)連携研究者
嘉田　勝（KADA Masaru）
大阪府立大学・理学研究科・准教授
研究者番号：00312447

大田　春外（OTA Haruto）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：40126769

(4)研究協力者
( )