

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：34509

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400215

研究課題名(和文)代数的組合せ論を用いた一般化直交行列の構成と応用

研究課題名(英文)Constructions of complex Hadamard matrices using Algebraic Combinatorics and its applications

研究代表者

生田 卓也 (Ikuta, Takuya)

神戸学院大学・法学部・教授

研究者番号：70271111

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、ある対称なアソシエーション・スキームの Bose-Mesner 代数に含まれる複素アダマール行列、および、その一般化である type-II 行列の無限系列を構成することである。特に、この構成は Ada Chan による 15 点の複素アダマール行列を含む。また、得られた複数の type-II 行列の非同値性を示すために Haagerup set を計算して、また、得られた複素アダマール行列が generalized tensor product に分解されない例であることを証明するために野村代数を決定する。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to construct infinite series of complex Hadamard matrices, and more generally, type-II matrices, in the Bose-Mesner algebra of a certain symmetric association scheme. In particular, we recover the complex Hadamard matrices of order 15 found by Ada Chan. We compute the Haagerup sets to show inequivalence of resulting type-II matrices, and determine the Nomura algebras to show that the resulting matrices are not decomposable into generalized tensor products.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：複素アダマール行列 type-II行列 アソシエーション・スキーム Bose-Mesner代数 野村代数

1. 研究開始当初の背景

アダマール行列の一般化である複素アダマール行列は、数学のみならず様々な他分野と関わりをもった応用数学の一分野である。本研究では複素アダマール行列を代数的組合せ論の対称アソシエーション・スキームを用いて構成することであるが、研究開始当初の背景について、次の3つのテーマに分けて説明する。

(1) 「Ada Chan の 15 点の複素アダマール行列の一般化」

本研究は、Ada Chan が見つけた 15 点の Petersen graph の Line graph に付随する 3 つの複素アダマール行列以外に、我々がもう一つ別の異なる複素アダマール行列を見つけたことに始まる。これにより Petersen graph の Line graph に付随する複素アダマール行列の分類は終わった。このグラフは直径 3 の antipodal distance-regular graph と呼ばれる対称アソシエーション・スキームに属することが知られているが、この観点から複素アダマール行列を考えると、点のサイズは高々 16 と上からバウンドされる。従って、Ada Chan が見つけた 15 点の複素アダマール行列の一般化を考えると、他の異なる対称アソシエーション・スキームの系列を見つける必要があるが、これは未解決である。

(2) 「大きなクラスの対称アソシエーション・スキームに付随する複素アダマール行列の構成」

比較的小さなクラスの対称アソシエーション・スキームはたくさん存在するので、付随する複素アダマール行列は存在しやすい状況にある。そこで、クラスが大きい対称アソシエーション・スキームに付随する複素アダマール行列の構成に興味があるが、この方面の研究アプローチは行われていない。

(3) 「新しい複素アダマール行列であること

の判定」

対称アソシエーション・スキームから構成される複素アダマール行列が新しい例であるかどうかは興味ある研究対象である。Ada Chan が見つけた 15 点の 3 つの複素アダマール行列に対して、知られている複素アダマール行列を用いて記述されるかどうかの判定は未解決である。

2. 研究の目的

「研究開始当初の背景」で述べた 3 つのテーマに沿って研究の目的を説明する。

(1) 「Ada Chan の 15 点の複素アダマール行列の一般化」

Ada Chan が見つけた 15 点の Petersen graph の Line graph を含む antipodal distance-regular graph と異なる別の対称アソシエーション・スキームの無限系列を構成し、これに付随する複素アダマール行列の無限系列を構成すると共に、付随する type-II 行列を分類することを目的とする。

(2) 「大きなクラスの対称アソシエーション・スキームに付随する複素アダマール行列の構成」

より大きなクラスのアソシエーション・スキームに付随する複素アダマール行列を構成することを目的にする。更に、複素アダマール行列と相性の良い対称アソシエーション・スキームの性質を調べる。

(3) 「新しい複素アダマール行列であることの判定」

一般に、零と異なる成分をもつ直交関係を満たす正方行列は、常にある種のアソシエーション・スキームの Bose-Mesner 代数と一致することが F. Jaeger-松本眞-野村和正により示されている。この代数を野村代数と呼ぶ。複素アダマール行列の分解性と野村代数を関連付けた研究はなく、野村代数を用いて複

素アダマール行列が新しいものであるかどうかを判定することを目的にする。

3. 研究の方法

複素アダマール行列の成分は絶対値 1 の複素数であるから、二つの行列成分の比とその逆数の和は -2 と 2 の間の実数であることに注意する。対称アソシエーション・スキームの第一固有行列の成分は実数であるから、これに付随する複素アダマール行列を実係数の多項式で記述して、その零点を見つけることで複素アダマール行列を構成する手法を取る。

以降、「研究開始当初の背景」で述べた 3 つのテーマに沿って研究の方法を説明する。

(1) 「Ada Chan の 15 点の複素アダマール行列の一般化」

Edwin R. van Dam は 1999 年に 100 点以下のクラス 3 の対称アソシエーション・スキームを分類している。このリストには 94 個の対称アソシエーション・スキームの第一固有行列がある。このリストを用いて複素アダマール行列を分類する。この分類結果から対称アソシエーション・スキームの無限系列を推測し、無限系列の複素アダマール行列と type-II 行列を構成して分類する手法を取る。

(2) 「大きなクラスの対称アソシエーション・スキームに付随する複素アダマール行列の構成」

(1) で構成した対称アソシエーション・スキームの第一固有行列の特徴を捉えることで、A. E. Brouwer- A. M. Cohen-A. Neumaier の Distance-Regular Graphs の本に掲載されている対称アソシエーション・スキームのリストから複素アダマール行列を持つ対称アソシエーション・スキームの例を調べる。そして、複素アダマール行列の存在を調べる。

(3) 「新しい複素アダマール行列であること

の判定」

複素アダマール行列が小さなサイズの複素アダマール行列で記述されているかどうかの一つの判定は、複素アダマール行列が generalized tensor 積で表されることと同値であり、この同値性は 2003 年の鈴木-細谷の結果を用いると複素アダマール行列の野村代数が原始的であることと同値である。従って、複素アダマール行列の野村代数の次元をアソシエーション・スキームの構造定数を用いて決定することを考える。

4. 研究成果

複素アダマール行列の無限系列の構成とその性質について、主に次の 3 つの研究成果を得られたので、「研究開始当初の背景」で説明した 3 つのテーマに沿って報告する。

(1) Edwin R. van Dam の 100 点以下のクラス 3 の対称アソシエーション・スキームの分類を用いると、8 個の複素アダマール行列が存在することを確認した。このうち 1 個は Petersen graph の Line graph である。この例を含む 4 個の対称アソシエーション・スキームを考えることで、位数が q^2-1 (q は 4 以上の偶数) の対称アソシエーション・スキームの無限系列を示した。更に、これに付随する type-II 行列を分類することで合計 4 個の複素アダマール行列が存在することを示した。特に、 q が 2 冪のとき対称アソシエーション・スキームの実例が存在することを付記しておく。

(2) (1) の対称アソシエーション・スキームの特徴を捉えることで、クラス 4 の even orthogonal scheme に付随する複素アダマール行列の一つの無限系列の構成を示した。構成された無限系列はある変数に対応する多項式の次数が 1 次である。コンピュータの数値計算で、残り 4 次式と 9 次式に対応する複素アダマール行列の無限系列の存在の可能

性が予想できる。今後の研究課題である。

(3) (1)で構成した無限系列の複素ダマール行列の野村代数を決定することができた。野村代数の次元は2次元なのでアソシエーション・スキームは原始的であり、generalized tensor 積では表されないことを証明することができた。このアプローチは、他の複素アダマール行列が generalized tensor 積に分解可能かどうかの議論に応用可能である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

[1] Takuya Ikuta and Akihiro Munemasa, Complex Hadamard matrices contained in a Bose-Mesner algebra, Spec. Matrices 3(2015), 91-110 (査読有)

[2] Takuya Ikuta, A complex Hadamard matrix in an odd orthogonal scheme, 第32回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 2015年, 137-152.

[3] Takuya Ikuta and Akihiro Munemasa, Complex Hadamard matrices attached to some association schemes, 京都大学 RIMS 講究録(1956), 137-152.

[学会発表] (計10件)

[1] Takuya Ikuta, A complex Hadamard matrix in an odd orthogonal scheme, International workshop on Algebraic Combinatorics at ZJU, 2015年9月19日, 浙江大学(中国)

[2] 生田 卓也, A complex Hadamard matrix in an odd orthogonal scheme, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015年8月23日, 熊本大学

[3] Takuya Ikuta, Complex Hadamard matrices attached to some association schemes, CanaDAM2015 University of Saskatchewan in Saskatoon (招待講演), 2015年6月3日, University of Saskatchewan (カナダ)

[4] 生田 卓也, 複素アダマール行列の association schemesによる構成と諸問題, (非)可換代数をトポロジー, 2015年2月14日,

信州大学

[5] Takuya Ikuta, Complex Hadamard matrices coming from some association schemes of class 4, Algebraic Combinatorics Workshop, 2014年11月26日, University of Science and Technology of China (中国)

[6] 生田 卓也, Examples of complex Hadamard matrices coming from some association schemes, Workshop on Hadamard matrices and Combinatorial design, 2014年10月31日, 東北大学 情報科学研究科

[7] Takuya Ikuta, Complex Hadamard matrices and association schemes, The eight Shanghai conference on combinatorics, 2014年5月25日, 上海交通大学(中国)

[8] Takuya Ikuta, The Haagerup set for type-II matrices attached to some association schemes, Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics, 2014年5月18日, 日本大学

[9] Takuya Ikuta, Complex Hadamard matrices attached to 3-class symmetric association schemes, Workshop on Algebraic Combinatorics, 2013年11月18日, 河北師範大学(中国)

[10] 生田 卓也, Classification of complex Hadamard matrices and association schemes, 離散数学とその応用研究集会2013, 2013年8月8日, 山形市保険センター

6. 研究組織

(1) 研究代表者

生田 卓也 (IKUTA TAKUYA)
神戸学院大学・法学部・教授
研究者番号: 70271111

(2) 研究分担者

宗政 昭弘 (MUNEMASA AKIHIRO)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 50219862