

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 21 日現在

機関番号：35504

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400216

研究課題名(和文)カオス尺度によるカオス現象の定量化

研究課題名(英文)Quantization of chaotic phenomena by the chaos degree

研究代表者

井上 啓 (Inoue, Kei)

山口東京理科大学・工学部・教授

研究者番号：70307700

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：リアプノフ指数は力学系のカオスの度合を測る指標としてよく用いられている。しかし、リアプノフ指数の計算の困難な場合がしばしば存在する。そこで、以前に、力学系のカオスを測るための情報量を導入する試みが行われた。情報理論の観点から見れば、カオス現象は情報生成過程と考えられる。この考えに従って、カオス尺度と呼ばれるある情報量が導入された。

本研究では、主に、(1)古典離散系におけるカオス尺度の性質を示し、(2)カオス尺度による準周期軌道の取る扱い方法を確立し、(3)境界条件をもつ一般化多重パイコね変換の評価をカオス尺度により行った。現在、実験等により得られた時系列データのカオス解析を進めている。

研究成果の概要(英文)：Lyapunov exponent is well used as a criterion to measure the degree of chaos of dynamical systems. There exists such a certain chaotic dynamical system that it is often difficult to compute its Lyapunov exponent. In such situations we tried to introduce such an information quantity that we can measure chaos of dynamical systems. From the information theoretical point of view, the chaos can be considered as an information generative process. Following that idea, an information quantity, which is called entropic chaos degree, was introduced.

In this study, the following topics were mainly studied: (1) basic properties of the chaos degree in classical discrete systems was shown, (2) how to treat quasi-periodic orbits was established by using the entropic chaos degree, and (3) evaluations of generalized multibaker maps with boundary conditions were considered by the chaos degree. Now an analysis of chaos for a time series obtained from some experiments is tried by the chaos degree.

研究分野：カオス、フラクタル、情報数理論

キーワード：カオスの定量化 カオス尺度 リアプノフ指数 情報理論

1. 研究開始当初の背景

カオスは、非線形な微分方程式などで記述される力学系に現れる複雑で予測困難な挙動であることが知られている。現在までに、カオスを特徴付ける指標として、リアプノフ指数、フラクタル次元、力学的エントロピーなどが提案され利用されている。その中でもリアプノフ指数は、カオス力学系に現れる典型的な特徴である“初期値鋭敏性”を捉える指標である。リアプノフ指数は、対象とする力学系が多次元である場合は、その次元数のリアプノフ指数が得られるため、その最大値（最大リアプノフ指数）によって力学系のカオスを特徴付ける。したがって、リアプノフ指数は力学系の次元を問わず力学系のカオスの定量的な評価を与える有用な指標として頻繁に用いられている。

しかしながら、リアプノフ指数の計算自体が困難な場合やリアプノフ指数の計算が可能であってもその値の評価が難しい場合もある。たとえば、力学系の方程式が明確に分からずその力学系の情報を時系列でしか得られない場合や、高次元系で最大リアプノフ指数による評価だけでは難しく得られた複数のリアプノフ指数の値を総合的に評価しなければならない場合等である。したがって、リアプノフ指数が計算可能な場合はリアプノフ指数と同等の評価を与えるだけでなく、リアプノフ指数の計算・評価が困難な場合でもその力学系のカオスを総合的に定量化する方法を導入できれば、さらなるカオスの理解に繋がる可能性がある。

情報理論の観点からみれば、カオスは時間経過とともに情報量が増大していくある情報生成過程とみなすことができることから、本研究代表者らは、情報論的アプローチでカオスの特徴付けを試みている。すなわち、今までに、カオス的な振る舞いを示す系のカオスの度合いをある情報量（エントロピー型カオス尺度）を用いて調べる研究を行っている。

2. 研究の目的

非線形現象におけるカオスの研究では、そのカオスの定量化が重要なテーマの一つである。なぜなら、その振舞いがカオス的であると分かっても、カオスの強度によりその振舞いに幅があるからである。例えば、カオスの強度が弱くと規則的な振舞い(収束、周期運動等)に近づき、カオスの強度が強くとランダムな運動となる。したがって、単に、その現象がカオスであることを示すだけではカオスの応用には繋がりにくい。そこで、従来は、カオスの定量化のためにリアプノフ指数がよく用いられてきた。しかし、実際のカオス現象ではリアプノフ指数が計算困難な場合が多い。そこで、本研究では、情報論的な視点から導入されたカオス尺度という指標を

用いて、カオスの定量化を試み、カオスの応用研究に役立たせることを目的とする。

本研究では、上記で述べた研究背景とこれまでの研究成果を基にして、研究期間内には、以下のことを明らかにすることを目指す。

- (1) 多数の数値計算により明らかになってきたエントロピー型カオス尺度（以下、カオス尺度と略）とリアプノフ指数の関係を解析的に示す。すなわち、リアプノフ指数が正になる場合について、リアプノフ指数のオーダとカオス尺度のオーダが一致することを示し、複数のリアプノフ指数の値を持つ多次元におけるカオス尺度との関係式を示す。
- (2) 理論モデルであってもより実際の現象を考慮して考案された複数の要素が絡んだ多次元の理論モデルに対して、カオス尺度の有効性を示す。
- (3) 遅延系に見られるように系に関する情報が時系列データしか得られないような実際の非線形現象に対して、カオス尺度の有効性を示す。

3. 研究の方法

本研究では、情報論的な視点から導入されたカオス尺度という指標を用いて、非線形現象のカオスの定量化を試みる。リアプノフ指数では計算が困難な場合や評価が難しい場合において、カオス尺度を用いて非線形現象のカオスを特徴付けることを試み、本研究成果をカオスの応用研究に役立たせることを目的とする。そのために、本研究計画では、以下の3つの研究を順に進めていく。

(1) カオス尺度の解析的性質とリアプノフ指数との関係の導出

情報理論の観点からみれば、カオスは時間経過とともに情報量が増大していくある情報生成過程とみなすことができる。この考え方を利用して導入されたカオスを測る指標が、カオス尺度である。この場合、軌道の確率分布が設定され時刻とともに変化していくという状況を想定しており、情報理論の量的尺度の一つである条件付きエントロピーがカオス尺度となる。今までに数値計算によって得られた結果を見直し、カオス尺度の性質やリアプノフ指数との関係を解析的に導出することを試みる。

① 分割領域の設定

カオス尺度の計算では、軌道の初期確率分布と同時確率分布を軌道の情報により設定する必要がある。軌道の初期確率分布の設定に当たっては、過渡的な状態の影響を受けにくくするため、任意の初期点から始まってある程度時間(時刻 M)が経過した後の軌道点を初期分布の計算の対象とする。すなわち、時刻 $(M+1)$ から時刻 $(M+N)$ (N は十分大きい整数)の軌道点を考え、 N 個の写像点それぞれがどの分割要素 A_i に入るかによって軌道の初期確率分布を設定する。分割 $\{A_i\}$ の仕方は任

意ではあるが、計算の利便性を考慮して分割領域は等分割な正方領域とする。このように領域を等分割にすることで、解析的な性質も導きやすくなる。また、軌道の同時確率分布に関しては、初期分布を設定するときを利用した軌道点 $x(k)$ と 1 時刻先の軌道点 $x(k+1)$ がどの分割要素に入るかによって設定をする。このように軌道の初期確率分布と同時確率分布を設定すると、カオス尺度の解析的性質は任意の分割要素 A_i に含まれる軌道点 $x(k)$ が複数の分割要素にどのように分岐するかによって議論することができるようになる。

② カオス尺度の性質とリアプノフ指数との関係

①のように分割領域を設定すると、不動点、周期運動の場合のカオス尺度は 0 であることは容易に導ける。また、分割領域を微小領域にまで分割することを考えれば、リアプノフ指数が正であるカオス運動の場合はカオス尺度が正であることも容易に導ける。リアプノフ指数が相異なる正の値を取る 2 つの力学系を考えれば、同様に分割領域を微小領域にまで分割を考えることで、リアプノフ指数とカオス尺度の値の順序が一致することが、エントロピーの諸々の性質を利用することで証明可能と考えている。懸念されるのは、カオス尺度が KS エントロピーとは異なり領域分割が固定されるため、準周期運動の場合（リアプノフ指数=0 に相当）にカオス尺度が正の値を取り、カオス運動との判別が難しくなる可能性がある点である。しかしながら、この点に関しては、準周期運動固有の状況を加味すれば回避可能と考えている。すなわち、分割要素 A_i に含まれる点は 2 つの分割要素に分離されるが、どの分割要素 A_i 自身より大きな領域に拡大しないという状況を利用した簡易尺度を補助的に導入することで解決可能と考えている。

(2) 実際的な非線形モデルに対するカオス尺度による評価

カオスを示す写像であるロジスティック写像は、生物の捕食モデルを簡略化した非線形モデルである。その意味では、現実の捕食関係を表しているともみなせるが、実際の状況はかなり簡略化している。なぜなら、捕食の要素を絞り 1 次元写像として定義しているからである。同様に、実際の現象を簡略化したモデルの一つとして、多重パイこね変換がある。この写像は、パイをこねる操作を表す変換（パイこね変換）に加えて、パイこね変換が適用される領域が鎖状に並べられ複数の領域を行き来するように設定された 3 次元写像である。この多重パイこね変換は、筒状の容器に両端に温度差のある水（流体）を閉じ込めたときの粒子の振る舞いを簡略化したモデルである。実際の拡散方程式に比べるとかなり簡略化したモデルであるが、実際の状況を想定して筒状の容器に境界があると仮定すると、境界条件により様々な状況が発

生し、リアプノフ指数の計算が困難な状況となる。このようなリアプノフ指数の計算が困難な多次元非線形モデルにおいて、カオス尺度によるカオス解析を試みる。この場合、軌道計算において倍精度(double)程度では誤差拡大により実際の力学系を反映できない可能性が懸念されるが、この点に関しては任意精度計算用のフリーライブラリ(GMP: The GNU Multiple Precision Arithmetic Library)を利用することで解決可能と考えている。

(3) 時系列でしか力学系の情報が得られない非線形現象のカオス尺度による評価

力学系のカオスを応用する研究では、力学系の方程式が明確に分からず時系列でしか力学系の情報が得られないことが多いことが知られている。実際に、本申請者が幹事として所属している日本応用数学会のカオス応用研究部会（以下、カオス応用研究部会という）において、カオスの応用にあたり、リアプノフ指数やフラクタル次元を求めることが困難な場合が度々報告されている。たとえば、安定的な THz 波を安価に発生するためにレーザーカオス光を光伝導アンテナの励起光源として用いるといった研究においてリアプノフ指数の計算が行われているが、レーザーカオス光を遅延系により発生させるため時系列でしか遅延系の情報を知ることができない。そのため、適切なカオス強度のレーザーカオス光が利用されているかどうかを判断するのが困難な状況にある。このような場合に、リアプノフ指数の代わりにカオス尺度によりカオスを定量化することで、カオスの応用研究に役立たせたいと考えている。この場合、実測の時系列データ等の入手法が懸念されるが、この点に関しては、カオス応用研究部会のメンバーの協力が得られるため、解決可能と考えている。

4. 研究成果

(1) 平成 25 年度の成果：

カオス尺度の解析的性質及びカオス尺度とリアプノフ指数との関係に関する研究を中心に進めた。

カオス尺度の解析的性質を調べるにあたっては、軌道の確率分布と同時確率分布を軌道の情報により設定する必要がある。このとき、カオス尺度の値は軌道の領域の領域分割の仕方に依存する。そのため、後の計算における利便性を考慮して分割領域を当分勝つな正方領域として設定して解析的性質を導出した。その結果、不動点や周期軌道ではカオス尺度は 0 の値を取り、カオス軌道の場合は正の値を取ることを解析的に確認した。

また、カオス尺度とリアプノフ指数の関係については、2 進変換やテント写像で生成される典型的なカオス軌道に対しては、カオス尺度とリアプノフ指数の間に成立する関係式を導出することができた。しかし、当初懸

念していたように、準周期軌道に対してはカオス尺度とリアプノフ指数の間の明確な関係を導くことができなかった。その理由は、カオス尺度が準周期軌道に対しては正の値を取ってしまうことにある。このことは、カオス尺度のみではカオス軌道と準周期軌道の区別が難しいことに繋がるため、準周期軌道を区別するための補助的な指標を導入した。

(2) 平成 26 年度の成果 :

カオス尺度の準周期軌道の取扱いについての研究を中心に進めた。

まず、昨年度導入した準周期軌道とカオス尺度を区別するための補助的な指標の有効性を検討した。その結果、理論上の予想とは異なり、実際には機能しないことが判明した。

そこで、2 つの異なる周期をもつ余弦関数の重ね合わせで表現される準周期軌道のカオス尺度による評価を再検討した。その結果、円写像によって生成される準周期軌道に対しては、カオス尺度が写像の定義域の分割数に関して周期的に振舞うことを明確に確認することができた。しかし、必ずしも全ての準周期軌道の振る舞いを明確に特徴付けることができるとは限らないため、スペクトル解析などを併用することで、より確実にカオス軌道と準周期軌道の違いを判断したほうがよいことが分かった。

また、平成 26 年度に予定していた研究、すなわち、実際の現象を単純化したモデルの 1 つである多重パイこね変換の特徴付けに関する研究も実施した。多重パイこね変換は、ある拡散方程式を離散化し単純化することによって導入された力学系のモデルである。多重パイこね変換のカオスを調べるために、変換する分割領域の対称性を崩して導入した一般化多重パイこね変換のカオス尺度を求めた。その結果、カオス尺度と最大リアプノフ指数による評価値の順序が一致していることを確認した。また、カオス尺度を通して、境界条件の違いによりカオスの強度が異なることも確認した。

(3) 平成 27 年度の成果 :

昨年度からの継続課題である実際的な非線形モデルに対するカオス尺度による評価を行った。具体的には、多重パイこね変換のカオス尺度による評価についての検証を行った。多重パイこね変換は単位平面状で定義され、初期点は時間発展するにつれて、隣接した左右の無限個の単位平面に拡散していくため、一般的には、多重パイこね変換を作用させる単位平面の個数を限定してしまうとカオスの強度が減少する。

そこで、単位平面の個数を限定しても多重パイこね変換のカオスの強度に影響を与えない単位平面の最小個数をカオス尺度を用いて見積もった。また、多重パイこね変換の拡散のバランスが崩れると左右どちらか一

方向の単位平面に拡散する散った現象が現れるが、カオス尺度の値がこの現象の効果を十分に反映していることを確認した。

次に、時系列でしか力学系の情報が得られない非線形現象について、カオス尺度による評価を試みた。具体的には、レーザーカオス光により得られる時系列データのカオス尺度の計算を行った。このレーザーカオス光は安価は THz 波を発生させるために利用されており、発信したレーザー光を分光させ、分光させた光を外部鏡により反射させ戻り光を元のレーザー光に加えるといった仕組みで生成される。このとき、主に 2 つのタイプの振動(LFF と RO)が発生する。これらの振動のカオスを定量化することが、レーザーカオス光のカオスの強度を調べることになる。

そこで、本研究では、LFF と RO の時系列データからカオス尺度を求めることを試みた。その結果、レーザーカオス光のカオスの強度が十分でない場合はノイズを多く含んでいることを確認した。今後は、共同研究者の栗島氏(福井高大)により、更なるサンプル時系列データの提供を受ける予定であり、レーザーカオス光が十分なカオスの強度を得るための条件を検証したいと考えている。

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(計 10 件)

- ① K. Inoue, M. Kato: “Evaluation of a generalized multibaker map with a boundary condition by the Chaos Degree”, to be published in INFORMATION, 2016.
- ② K.-H. Fichtner, K. Inoue: “Time evolution of quantum systems related to the quantum Zeno scheme”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.105, No.1, 115-126, 2015. (査読有).
- ③ K. Inoue and M. Kato: “Analysis of an extended chaotic map by the chaos degree”, Proceedings of the Seventh International Conference on Information, 361-364, 2015 (査読有).
- ④ 井上 啓: “カオス尺度における準周期軌道の取り扱い”, 日本応用数学会論文誌, Vol.25, No.2, 105-115, 2015 (査読有).
- ⑤ K. Inoue: “Basic properties of entropic chaos degree in classical systems”, INFORMATION, Vol.16, No.12(B), 8589-8596, 2013 (査読有).

- ⑥ K.-H. Fichtner, K. Inoue and M. Ohya: “Approximative approaches to a stochastic partial differential equation by point systems”, Random Oper. Stoch. Equ., Vol.21, 375-384, 2013 (査読有).
- ⑦ K.-H. Fichtner and K. Inoue: “On the quantum Zeno effect and time series related to quantum measurements”, Applied Mathematics, Vol.4, No.10C, 61-69, 2013 (査読有).
- ⑧ K. Inoue: “Adaptations for block partition and scanning direction in the predictive position modeling with a reference block”, INFORMATION, Vol.16, No.7(A), 4421-4429, 2013 (査読有).
- ⑨ K. Inoue: “Some properties of an information quantity to measure chaos”, Proceedings of the Sixth International Conference on Information, 424-427, 2013 (査読有).
- ⑩ K.-H. Fichtner, L. Fichtner, K. Inoue and M. Ohya: “Internal noise of EEG-measurements and certain boson systems”, QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol.30 (Quantum Bio-Informatics V), 143-158, 2013 (査読有).

【学会発表】(計 8 件)

- ① 井上 啓, 栞島史欣: “カオス尺度を用いたレーザーカオス時系列データのカオス解析”, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第 19 回シンポジウム, 天瀬公民館, 2016 年 1 月.
- ② 井上 啓, 栞島史欣: “カオス尺度による実験データのカオス解析”, 日本応用数学会 2015 年度年会, 金沢大学, 2015 年 9 月.
- ③ 井上 啓: “カオス尺度によるカオス軌道及び準周期軌道の評価”, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第 18 回シンポジウム, 加計学園国際学術交流センター, 2014 年 12 月.
- ④ 井上 啓: “カオス尺度における準周期軌道の取り扱い”, 日本応用数学会 2014 年度年会, 政策研究大学院大学, 2014 年 9 月.
- ⑤ 井上 啓: “カオス尺度による拡張型カ

オスモデルの考察”, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第 17 回シンポジウム, 愛媛大学, 2014 年 1 月.

- ⑥ 宇野弘高, 井上 啓: “初心者を上達させるリバーシ人工知能”, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第 17 回シンポジウム, 愛媛大学, 2014 年 1 月.
- ⑦ 井上 啓: “カオス尺度の諸性質について”, 日本応用数学会 2013 年度年会, アクロス福岡, 2013 年 9 月.
- ⑧ 井上 啓: “エントロピー型カオス尺度の性質について”, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第 16 回シンポジウム, 愛媛大学, 2013 年 1 月.

[その他]
ホームページ
<http://www.ed.tusy.ac.jp/inoue/>

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
井上 啓 (INOUE, Kei)
山口東京理科大学・工学部・教授 研究者番号: 70307700