

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 29 日現在

機関番号：35403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400217

研究課題名(和文)代数的グラフ理論とスペクトラルグラフ理論を用いたグラフの構造解明

研究課題名(英文)A elucidation of the structure of graphs by Algebraic Graph Theory and Spectral Graph Theory

研究代表者

谷口 哲至(Taniguchi, Tetsuji)

広島工業大学・工学部・准教授

研究者番号：90543728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：グラフを隣接行列やラプラシアン行列などの行列とみなすことで、線形代数の言葉で構造を研究することができるようになる。本研究では固有値を制限した時のグラフの構造について調べ、そして再生核ヒルベルト空間論を用いた新たな研究領域の開拓に挑戦した。「固有値」という大まかなキーワードを考えた時、様々な数学の領域が存在する。離散構造を考えた時、自然とグラフが現れることが理由である。様々な領域でグラフの固有値を研究している研究者を集め、情報を共有するために毎年研究集会を開いてきた。

研究成果の概要(英文)：By considering a graph as a matrix such as an Adjacency matrix or Laplacian matrix, we can study the structure with the linear algebra. In this research, we investigated the structure of graphs when eigenvalues are restricted, and challenged to explore a new research area by using the reproducing kernel Hilbert space theory. When considering the rough keyword "eigenvalue", there exist various mathematical research fields. When considering the discrete structure, it is because graph appear naturally. We have held research meetings every year to gather researchers who are studying graph eigenvalues in various mathematical areas and share information.

研究分野：代数的グラフ理論

キーワード：グラフ 固有値 代数構造

### 1. 研究開始当初の背景

一言にグラフの分類といっても、その手法は様々である。本研究におけるグラフの構造解明についてのアプローチとは、その隣接行列の最小固有値によるものである。先行研究として、最小固有値 $-2$ 以上のグラフの分類・特徴付けがある。これらはライングラフ（以降 LG）の最小固有値が $-2$ 以上である点に注目し、既約ルート系の話題と絡め研究を進めた。しかし、これらの手法では、最小固有値の階層を降ることができず、長らく研究は進んでこなかった。A.J. Hoffman 氏は、 $-1-\sqrt{2}$ 以上の最小固有値を持つグラフの研究を行い、それを元に R. Woo 氏、A. Neumaier 氏ら（1995 年）は最小固有値によるグラフの極限構造（ホフマンガラフ）を用いて、その階層構造を降ることのできる新しい LG を導入した。これにより、最小固有値の階層を自由に降ることのできる環境が整ったのである。

ホフマンガラフ（以降 HG）には分解可能な物とそうでない物がある。ここに既約性の概念が生じ、問題「最小固有値 $-3$ 以上の fat 既約 HG の分類」が設定される。本研究の始まりは、Beineke 氏による LG の同定問題の解決であり、Cvetković 氏達によるその一般化である。ここで用いる考え方は、グラフからその LG を構成する単純な作業を高度に一般化した Woo 氏、Neumaier 氏の考え方である。その難解さ故に後続研究が殆ど無いが、申請者は「和」、「既約分解」の概念を発見した。そもそも既約 HG を用いた一般論の展開は、本研究の流れ以外には存在しなかった。

### 2. 研究の目的

スペクトラルグラフ理論（以降 SG 理論）とはグラフを行列に置き換え固有値問題として捉える分野である。過去 A.J. Hoffman 氏らによる発展がみられ、制御理論、ネットワーク等に応用が見られる。また、代数的グラフ理論とは代数構造からグラフを解明、或はその逆を知る分野である。これらはグラフ構造を固有値から知る点で共通部分が多い。

我々は「ルート系とグラフの最小固有値の関係」を研究してきたが、D. Cvetković 氏、R. Woo 氏、A. Neumaier 氏達の先行研究に依る所が大きい。本研究ではグラフの最小固有値による分解理論という先駆的手法と SG 理論の融合による、「隣接行列の最小固有値によるグラフの階層構造」の解明を目指す事が主な目的である。

グラフを離接行列やラプラシアン行列などの行列とみなすことで、線形代数の言葉で構造を研究することができるようになる。本研究では固有値を制限した時のグラフの構造について調べ、そして再生核ヒルベルト空間論を用いた新たな研究

領域の開拓に挑戦することも、目的の一つである。

「グラフの固有値」という大まかなキーワードを考えた時、様々な数学の領域に問題が存在する。離散構造を考えた時、自然とグラフが現れることが多いことが理由である。グラフの固有値に関する研究をしている研究者を一堂に会し、情報共有するために毎年研究集会を開く。

### 3. 研究の方法

- (1) 最小固有値 $-3$ 以上のグラフを分類することが重要だと感じ、そこから着手した。まず、 $-3$ より大きな固有値（ $\neq -3$ ）を持つグラフのスペシャルグラフ（辺符号グラフで、HG の圧縮構造と考えて良い。最小固有値が1ほど大きくなる）の構造を調べることから始めた。次に、最小固有値が $-2$ より大きな辺符号グラフを分類することで、最小固有値が $-3$ より大きな HG を特徴付けた。
- (2) 再生核ヒルベルト空間論を用いたグラフの構造についての研究は組合せ論的動機で研究が成されていない。本研究では再生核ヒルベルト空間のグラム行列を考えることで、グラフの構造を調べた。

### 4. 研究成果

- (1) この項目について、査読付き雑誌に3件掲載された。また、予稿集や報告集に3件掲載された。これにより、 $-3$ より大きな HG について概ね解決した。当初予定していたことよりも詳細な構造が分かり、かなり大きな成果があったと言って良い。
- (2) この項目について、査読付き雑誌に2件掲載された。再生核を用いることで構造が圧縮されるイメージで捉えてよかる。これは統計学で用いられているカーネルトリックという技術によるものである。圧縮することによって、グラム行列の成分や固有値にグラフの情報が詰められることになる。これにより、グラフ構造を知る技術を確立できた。今回の研究期間では組合せ論的構造解明といったところまでは到達しなかったが、そもそも本筋から少しそれた研究をする中で新しい道具の開発ができたということは、今後の研究が期待される良い成果であったと考えられる。

### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 8 件)

M. Seto, S. Suda and T. Taniguchi:  
Gram matrices of reproducing kernel  
Hilbert spaces over graphs II,  
Nihonkai Mathematical Journal, 26  
(2015), 15–29, 査読有り,

URL:  
<https://projecteuclid.org/euclid.nihmj/1459343067>  
A. Munemasa, Y. Sano, T. Taniguchi:  
On the smallest eigenvalues of the line graphs of some trees,  
Linear Algebra and Its Applications, 466(2015), 501-511, 査読有り,  
DOI: 10.1016/j.aa.2014.10.037  
G. Greaves, J. Koolen, A. Munemasa, Y. Sano, T. Taniguchi:  
Edge-signed graphs with smallest eigenvalue greater than -2,  
Journal of Combinatorial Theory. Series B, 110(2015), 90-111, 査読有り,  
DOI: 10.1016/j.dctb.2014.07.006  
A. Munemasa, Y. Sano and T. Taniguchi:  
Fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue greater than -3,  
Discrete Applied Mathematics, 176 (2014), 78-88, 査読有り,  
DOI: 10.1016/j.dam.2014.01.008  
M. Seto, S. Suda and T. Taniguchi:  
Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs, Linear algebra and its applications, 445 (2014), 56-68, 査読有り,  
DOI: 10.1016/j.dam.2013.12.001

[学会発表](計 17 件)

谷口哲至,  
ホフマングラフ理論と松江セミナー  
松江セミナー,  
2015年9月9日,  
島根大学(島根県・松江市)  
谷口哲至,  
A representation of Hoffman graphs,  
Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics,  
2015年8月12日,  
釜山(韓国)  
谷口哲至,  
A representation of Hoffman graphs,  
Systems of Lines: Applications of Algebraic Combinatorics,  
2015年8月12日,  
Worcester(米国)  
谷口哲至,  
Hoffman graphs and edge-signed graphs,  
第30回代数的組合せ論シンポジウム,  
2013年6月26日,  
静岡大学(静岡県・浜松市)  
谷口哲至,  
辺符号グラフとホフマングラフ  
デザイン、符号、グラフおよびその周辺,  
2015年7月10日,  
京都大学(京都府・京都市)

谷口哲至,  
Hoffman graphs with the smallest eigenvalue at least -3,  
8th Slovenian Conference on Graph Theory,  
2015年6月21日,  
Kranjska Gora(スロベニア)  
谷口哲至,  
グラフとその最小固有値,  
Intersection of Pure Mathematics and Applied Mathematics VIII,  
2015年2月20日,  
九州大学(福岡県・福岡市)  
谷口哲至,  
Hoffman graphs with the smallest eigenvalue at least -3,  
実験計画法およびその周辺の組合せ構造,  
2014年12月13日,  
Kinosaki International Arts Center(兵庫県・城崎市)  
谷口哲至,  
ホフマングラフとグラフの階層構造,  
広島組合せ論セミナー,  
2014年11月10日,  
広島工業大学(広島県・広島市)  
谷口哲至,  
ホフマングラフとグラフの階層構造,  
大阪組合せ論セミナー,  
2014年8月23日,  
大阪駅前第二ビル(大阪府・大阪市)  
谷口哲至,  
The smallest eigenvalues of the line graphs of some trees -- Cvetković and Stevanović's Question --,  
新潟 離散数学とその応用研究集会,  
2014年8月20日,  
新潟総合テレビ ゆめディア(新潟県・新潟市)  
谷口哲至,  
The smallest eigenvalues of the line graphs of some trees -- Cvetković and Stevanović's Question --,  
代数的組合せ論シンポジウム,  
2014年6月19日,  
東北大学(宮城県・仙台市)  
谷口哲至,  
ホフマングラフとグラフの階層構造,  
山陰 基礎論・解析学セミナー2014,  
2014年2月1日,  
米子工業高等専門学校(鳥取県・米子市)  
谷口哲至,  
グラフの最小固有値,  
日本数学会 中四国支部例会,  
2014年1月26日,  
島根大学(島根県・松江市)  
谷口哲至,  
グラフ理論における諸問題の紹介2,  
第一回広島組合せ論セミナー,  
2014年1月22日,  
広島工業大学(広島県・広島市)

谷口哲至,  
ホフマングラフとグラフの階層構造,  
組合せ論サマースクール 2013,  
2013年9月3日,  
ホテル大観(岩手県・盛岡市)  
谷口哲至,  
ホフマングラフとグラフの階層構造,  
離散数学とその応用研究集会 2013,  
2013年8月9日,  
山形市保健センター(山形県・山形市)

[その他]

ホームページ等

- スペクトラルグラフ理論および周辺領域

第2回研究集会

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanak/docs/sgt2/>

- スペクトラルグラフ理論および周辺領域

第3回研究集会

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanak/docs/sgt3/>

- スペクトラルグラフ理論および周辺領域

第4回研究集会

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanak/docs/sgt4/>

## 6. 研究組織

研究代表者

谷口 哲至 (Taniguchi, Tetsuji)  
広島工業大学・工学部・准教授  
研究者番号: 90543728

研究分担者

宗政 昭弘 (Munemasa, Akihiro)  
東北大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号: 50219862

連携研究者

瀬戸 道生 (Seto, Michio)  
防衛大学校・総合教育学群・准教授  
研究者番号: 30398953

研究協力者

佐野 良夫 (Sano, Yoshio)  
筑波大学・システム情報系・准教授  
研究者番号: 20650261

研究協力者

田中 太初 (Tanaka, Hajime)  
東北大学・情報科学研究科・准教授  
研究者番号: 50466546