

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400388

研究課題名(和文) 格子ゲージ理論によるトポロジカル量子相の研究

研究課題名(英文) Studies of topological phases based on lattice gauge theories

研究代表者

福井 隆裕 (Fukui, Takahiro)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：10322009

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：近年注目を浴びているトポロジカル絶縁体とは、例えばスピナップとダウンのそれぞれを見ればトポロジカルに非自明だが、全体としてはそれぞれのトポロジカル数が逆符号であるためキャンセルして、一見トポロジカルに自明と見えるような新しいタイプの絶縁体である。

これに動機付けされて、我々は互いに逆符号のチャーン数を持つ模型を帯状に交互に並べた超格子系模型を提案した。その特別な模型の新しい振る舞いを理解を目指している過程で「エンタングルメント・チャーン数」という一般的かつ普遍的な新しいタイプのトポロジカル数の発見に至った。これがトポロジカル絶縁体一般の理解に大変有効であることを示した。

研究成果の概要(英文)：The topological insulator is a new type of insulator. Let us consider a simple model which has the trivial Chern number because of time-reversal symmetry. Even if the total Chern number is zero, there is the case where each spin sector, if such a division is possible, has a nontrivial Chern number. Thus, vanishing Chern number does not necessarily mean that the system is topologically trivial.

Motivated by such an observation, we have started our research by proposing and analyzing a super lattice model which is a layered system with opposite Chern numbers. To understand unique properties of the model in spite of the vanishing Chern number, we have invented a new topological number "entanglement Chern number". It has turned out that such a new number is successfully applied to the description of generic topological phases of the systems.

研究分野：物性理論

キーワード：トポロジカル絶縁体 第1チャーン数 エンタングルメント ストレータ公式 第2チャーン数 量子ホール効果 トポロジカルポンプ

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 当初の世界的動向：グラフェンの量子ホール効果の観測や、トポロジカル絶縁体の理論的提案により 2005 年前後にスタートした物質の新しいトポロジカル相の研究は、2013 年には既に多くの研究者を巻き込んだ大きな研究分野へと発展していた。その中でも注目されるのは

これまでのトポロジカル物質は絶縁体において定義されるものであったが、むしろ金属となる起源（ギャップレスとなる起源）がトポロジカルであるような金属が 2011 年に提案された。これはワイル半金属と呼ばれ、その後の研究の大きな潮流となった。

このワイル半金属に関する研究の影響により、場の理論のカイラル量子異常を固体物理の中で検証しようとの提案が数多くなされるようになった。

原子核理論（クォーク・グルーオン・プラズマ）において提案されたカイラル磁気効果が固体物理でもワイル半金属の発展により興味を持たれるようになった。

トポロジカル絶縁体の実験的研究が非常に精力的になされるようになった。

以上のようにトポロジカル絶縁体の研究が初期の段階から、中期的な段階へと発展していった時期に相当すると考えられる。

(2) 本研究の報告者の状況：多くの研究者が参加することによりトポロジカル物質の研究が極度に多様化しているなかで、報告者は最初のトポロジカル絶縁体を根本的に理解したいと考えていた。

一方、ワイル半金属は弱いトポロジカル相物質を層状に積層することにより合成が可能である。したがってワイル半金属の研究が進んだことによりトポロジカル絶縁体の層状物質が興味を持たれていた。

このような状況の中で報告者は、2次元において互いに異なるチャーン数を持つ物質が帯状に重なった物質を理論的に提案し解析を始めようとしていた。もともとのトポロジカル絶縁体も、スピナップとダウンに分解して見れば（もちろんスピンはカップルしているので厳密な分解は不可能だが）非自明なチャーン数を持った状態で、それらが重なることで時間反転対称性を回復し、全体のチャーン数は0となっている。簡単に述べると同じくチャーン数0でも $0=0+0$ と $0=1-1$ は明確に区別が出来て、後者がトポロジカル絶縁体である。そこで、必ずしも時間反転対称性には拘らないで、 $0=1-1$ の状態を作り出しこれを如何に特徴付けるか、という課題を進めようとしていた。

## 2. 研究の目的

トポロジカル絶縁体は時間反転対称性と粒子・空孔対称性により基本的に10のクラスに分類される。これらのクラスは様々なトポロジカル数により特徴付けられる。トポロジカル数の数値計算方法の確立と、更にそれら

を記述するトポロジカル場の理論の構築を目的とする。

特に2000年前後に発展した格子ゲージ理論の成果を最大限に取り入れて研究を行うことを目指す。

## 3. 研究の方法

主に以下の2点から研究を行う。

[A] 相互作用がないフェルミオン多体系に対して、そのバンド理論からトポロジカル相を理解する。特に、その相を特徴付けるトポロジカル数を単純な模型だけではなく、複雑で現実的な模型でも計算出来る手法を確立する。

[B] 相互作用を含む場合も含めてトポロジカル相を理解するため有効場の理論を構築する。

特に初年度は超格子トポロジカル絶縁体の解析を出発点とする。

## 4. 研究成果

(1) 超格子模型の研究：我々の提案した超格子トポロジカル絶縁体は全体のチャーン数が0にも拘わらず奇妙なエッジ状態を持つことが分かった。この模型は、必ずしも時間反転対称性を持たないのに厳密にはトポロジカル絶縁体ではないが、チャーン数の異なる模型を交互に帯状に配置しているという意味で、トポロジカル絶縁体に近い。

エッジ状態をベリーの位相の観点から解析し一定の理解を得た。ここでベリー位相は言わばセクション・ベリー位相で各波数毎に定義されるベリー位相である。

このようにベリー位相は局所的なトポロジカル数なので、この模型を本当に理解するためにはバルクの大局的なトポロジカル数を議論したいところであるが、全く手掛かりがなかった。トポロジカル絶縁体ならば、バルクのZ2不変量によって特徴付けられるが、本模型には時間反転対称性が無いため、Z2不変量はそもそも定義出来ないからである。

この困難を克服するために考察を重ねて、ついに「エンタングルメント・チャーン数」なる新しいトポロジカル数を発見するに至る。

(2) エンタングルメント・チャーン数：今考えている系を2つの部分A、Bに分割することを考える。空間的な分割でも良いし、スピンのような内部自由度でも良い。このとき以下のようにして部分系に関して調べることにより系全体の性質を理解出来る。

先にも述べたが、トポロジカル絶縁体では各スピンのチャーン数を分離できれば比較的簡単に理解出来るが、一方でスピン軌道結合でスピンはお互いにカップルしているので一般に分離することは不可能である。

この分離を可能にしたのがエンタングルメントなる概念である。

例えばスピンのアップとダウンをそれぞれ部分系A、Bとする。この分割は並進対称

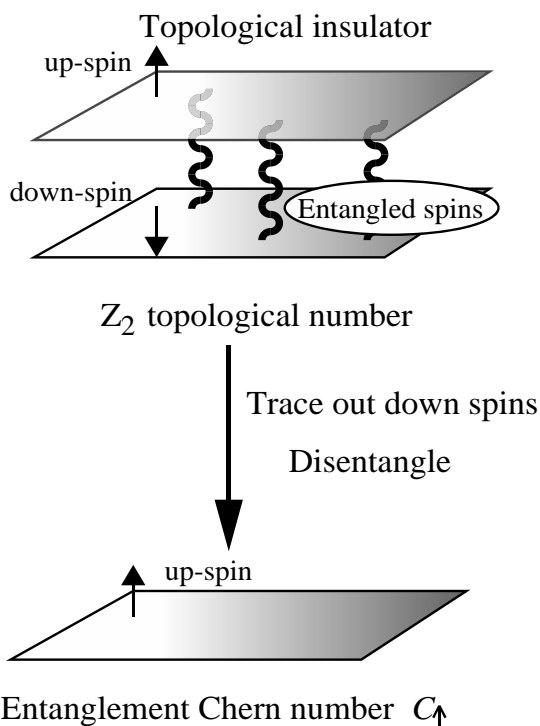
性を持っているので、波動関数を運動量表示できる。

基底状態の密度行列において、部分系 B をトレースアウトすることによって部分系 A に対するエンタングルメント・ハミルトニアンを導く。

最初の基底状態の密度行列は純粋状態に対するものであったが、部分系 A に対する密度行列は混合状態に対するものとなる。

この部分系 A の固有状態を求め直して部分系 A のエンタングルメント・ハミルトニアンを基底状態を作り直す。この部分系 A の基底状態から定義されるチャーン数を計算する。これが我々の見いだしたエンタングルメント・チャーン数である。

トポロジカル絶縁体の場合のエンタングルメント・チャーン数の概略を下図に記す。



このエンタングルメント・チャーン数を用いることによって、先に述べた超格子トポロジカル絶縁体が理解されるだけでなく、トポロジカル絶縁体の理解にも大変役に立つことが分かった。

(3) エンタングルメント・チャーン数のトポロジカル絶縁体への応用：トポロジカル絶縁体は  $Z_2$  数と呼ばれるトポロジカル数で特徴付けられる。この  $Z_2$  数は、系が時間反転対称性を持っていることが本質的である。したがって、無限小でも弱い磁場が印加されるともはや  $Z_2$  数は定義できない。ところがトポロジカル相はごく弱い磁場で壊れるとは思えない。実際に磁氣的トポロジカル絶縁体等も実験で報告されている。

では、どうしたらこのような弱い時間反転対称性の破れの効果を考慮したうえで、トポロジカル絶縁相の安定性を定量的に議論できるであろうか。

まず、磁場が 0 の場合のトポロジカル絶縁

体のエンタングルメント・チャーン数による分類と  $Z_2$  数による分類とが完全に一致するかどうかをトポロジカル絶縁体の典型的模型である Kane-Mele 模型で調べた。その結果は完全に一致することが分かった。

その結果に基づき、弱い磁場を入れて Kane-Mele 模型の相図がどのように変化するかを調べた。その結果、弱い磁場ではトポロジカル絶縁相は安定であるが、ゼロ磁場の相図の相境界付近には、至る所に新しい相が現れることが分かった。

(4) 最初に述べた超格子トポロジカル絶縁体模型では Wilson-Dirac 模型をベースにして質量項を調整することによって、超格子模型を提案した。

この Wilson-Dirac 模型はもともとは素粒子分野の格子ゲージ理論において提案された模型ではあるが、見方を変えるとトポロジカル絶縁体の典型的模型となっていて近年では物性物理学分野でも注目を集めている。この模型へのエンタングルメント・チャーン数の適用を考察中から、偶然に以下のことを発見した。

この模型に強磁場を入れた模型を考えると極めて興味深い振る舞いをする事が分かった。

この Wilson-Dirac 模型を用いてオーバーラップ演算子を導入すると、格子上でカイラル対称性を満足するフェルミオンを導入できることが知られているが、このオーバーラップ演算子から導いたカイラル量子異常の表式は、(2 次元の場合には)実は物性物理学でも良く知られた Streda 公式と全く同じ物であることが分かった。

この結果を 4 次元に拡張すると、4 次元へ一般化された Streda 公式を得ることが出来、これを用いて第 2 チャーン数を数値計算できることが分かった。

以上の発見は偶然のものではあるが、これまで困難であった第 2 チャーン数の計算を可能にした。これはまさに、本研究課題のタイトルをそのものの成果である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

(以下の雑誌論文は全て査読有り)

“Streda formula for the Hofstadter-Wilson-Dirac model in two and four dimensions” T. Fukui, T. Fujiwara, J. Phys. Soc. Jpn. 85 (2016) 124709 (1-5).

“A spin pump characterized by entanglement Chern numbers” T. Fukui and Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. 85 (2016) 083703 (1-4).

“Entanglement Chern Number of the Kane-Mele Model with Ferromagnetism” H. Araki, T. Kariyado, T. Fukui, Y.

Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. 85 (2016) 043706 (1-4). (Papers of Editors' Choice)  
“ Bulk-edge correspondence in a topological pumping ” Y.Hatsugai, T. Fukui, Phys. Rev. B94 (2016) 041102(R) (1-5).  
“ Disentangled topological numbers by a purification of entangled mixed states for non-interacting fermion systems ” T. Fukui and Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. 84 (2015) 043703 (1-5).  
“ Entanglement Chern number for an extensive partition of a topological ground state ” T. Fukui and Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. 83 (2014) 113705 (1-4).  
“ Characterizing the weak topological properties: Berry phase point of view ” Y. Yoshimura, K.-I. Imura, T. Fukui, and Y. Hatsugai, Phys. Rev. B90 (2014) 155443 (1-13).  
“ Symmetry protected weak topological phases in a superlattice ” T. Fukui, K.-I. Imura, Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. 82 (2013) 073708 (1-5).

〔学会発表〕(計 12 件)

「トポロジカル量子ポンプにおけるバルクエッジ対応」吉村幸徳, 井村健一郎, 初貝安弘, 福井隆裕, 日本物理学会大 72 回年次大会 (2017 年 3/17-3/20, 大阪大学)  
「2次元・4次元のHofstadter-Wilson-Dirac 模型と Streda 公式」福井隆裕, 藤原高德, 日本物理学会大 72 回年次大会 (2017 年 3/17-3/20, 大阪大学)  
「エンタングルメント・チャーン数で特徴付けられるスピン・ポンプ」福井隆裕, 初貝安弘, 日本物理学会 2016 年秋季大会 (2016 年 9/13-9/16, 金沢大学)  
「トポロジカルポンプにおけるバルク・エッジ対応」初貝安弘, 福井隆裕, 日本物理学会大 71 回年次大会 (2016 年 3/19-3/22, 東北学院大学)  
「磁場下の Kane-Mele 模型のエンタングルメントチャーン数と新しい相」荒木広夢, 苅宿俊風, 福井隆裕, 初貝安弘, 日本物理学会 2015 年秋季大会 (2015 年 9/16-9/19, 関西大学)  
「1次元梯子系におけるスピン・ポンプとエンタングルメント・チャーン数」福井隆裕, 初貝安弘, 日本物理学会 2015 年秋季大会 (2015 年 9/16-9/19, 関西大学)  
「エンタングルメント・チャーン数の提案と応用」福井隆裕, 初貝安弘, 日本物理学会大 70 回年次大会 (2015 年 3/21-3/24, 早稲田大学)  
「必ずしもカイラルでない系におけるベリー位相の量子化」福井隆裕, 初貝安弘, 日本物理学会 2014 年秋季大会 (2014 年 9/7-9/10, 中部大学)  
「超格子系の弱トポロジカル相とエッジ状態」吉村幸徳, 井村健一郎, 福井隆裕, 初貝

安弘, 日本物理学会 第 69 回年次大会 (2014 年 3/27-3/30, 東海大学)  
「二次元超格子系におけるトポロジカル相」福井隆裕, 井村健一郎, 初貝安弘, 日本物理学会 2013 年秋季大会 (2013 年 9/25-9/28, 徳島大学)  
「時間反転対称性を破る格子ディラック模型の離散対称性と量子化」初貝安弘, 福井隆裕, 井村健一郎, 日本物理学会 2013 年秋季大会 (2013 年 9/25-9/28, 徳島大学)  
「一次元トポロジカル絶縁体とトポロジカル超格子絶縁体」岡本真由子, 井村健一郎, 高根美武, 福井隆裕, 初貝安弘, 日本物理学会 2013 年秋季大会 (2013 年 9/25-9/28, 徳島大学)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

福井隆裕 (FUKUI TAKAHIRO)  
茨城大学・理学部・教授  
研究者番号: 10322009