

令和元年6月21日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25400397

研究課題名(和文) ランダム行列の普遍性と複雑ネットワーク

研究課題名(英文) Universality of random matrices and complex networks

研究代表者

永尾 太郎 (Nagao, Taro)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：10263196

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：インターネットなどのネットワークのつながり方を記述する複雑ネットワークモデルには、次数(1つの頂点に直接につながる辺の数)がべき分布する性質(スケールフリー性)がある。スケールフリー性をもつネットワークの数理モデルを構成し、その隣接行列について、固有値分布を調べた。また、複素固有値をもつランダム行列モデルを拡張し、複素平面上で直交する多項式の性質を利用することにより、普遍的な振る舞いを導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム行列理論は、サイズの大きい行列の固有値の分布に普遍的な振る舞いがあることを明らかにするものであるが、本研究では、これまで主に研究されてきた実固有値の分布の普遍性に加えて、複素固有値の分布の普遍性についての理解を深めることができた。また、ランダム行列理論の研究において開発されてきた手法は、数学や物理学の研究だけではなく、複雑ネットワークの記述を通じることにより、社会現象の研究にまで適用可能であることが示された。

研究成果の概要(英文)：In complex network models, describing the connection pattern of networks such as the internet, the degree (the number of edges directly connecting to a vertex) has a property (scale-free property) to be distributed according to a power law. Mathematical models of networks with scale-free property were constructed, and the eigenvalue distributions of the adjacency matrices were studied. In addition, random matrix models with complex eigenvalues were extended and universal behavior was found, by using the property of orthogonal polynomials on the complex plane.

研究分野：数理物理・物性基礎

キーワード：ランダム行列 普遍性 複雑ネットワーク

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ランダム行列とは、乱数を要素にもつ行列である。ランダム行列の理論は、数理統計学の分野において導入され、物理学に適用されて大きく発展した。物理学への応用としては、量子系のエネルギー準位統計への応用がよく知られている。エネルギー準位統計においては、ランダム行列の固有値によってエネルギー準位がモデル化される。対象となる量子系は、原子核、メソスコピック系、量子カオス系など多岐にわたる。エネルギー準位密度のゆらぎには系の性質の詳細によらない普遍性があり、ランダム行列の固有値密度のゆらぎによって再現されることがわかっている。この普遍性によって、エネルギー準位統計に対して広くランダム行列理論を応用することが可能になった。研究代表者は、基礎数理と応用の両面からランダム行列とその普遍性について研究してきた。

一方、近年になって発展してきた複雑ネットワークの理論においては、インターネットなどの現実的な複雑ネットワークが普遍的な構造をもつことが明らかにされている。特に重要な普遍的な構造としては、スケールフリー性が挙げられる。ネットワークは、複数の頂点が辺によって結ばれたものとして表される。1つの点に直接につながる辺の数(次数)の分布がべき分布になることをスケールフリー性と呼ぶ。ネットワークの構造を定めるには、 j 番目の頂点と k 番目の頂点が辺により直接に結ばれているときには1、直接に結ばれていないときには0の値をとる $j-k$ 要素をもつ行列(隣接行列)を与えればよい。スケールフリー性をみだす隣接行列の固有値分布は数値的に検証されており、その結果、従来のランダム行列モデルとは異なり、固有値分布がべき分布になることがわかっていた。このようなスケールフリー性をみだす隣接行列は、ランダム疎行列を一般化したスケールフリーランダム行列を構成することによって実現される。実際、場の理論的な方法(レプリカ法)によるスケールフリーランダム行列の解析により、数値計算の結果が再現されることが示されていた。

2. 研究の目的

ランダム行列は物理学の様々な問題に応用されてきたが、その基礎となるのは固有値や固有ベクトルの分布の普遍性である。一方、近年の研究により、生物学や社会学に現れる複雑ネットワークは、スケールフリー性などの普遍的な特徴をもち、そのつながり方を表す隣接行列は、従来のランダム行列理論で扱われてきたものとは異なる特徴をもつことが明らかにされている。本研究においては、これらの既存研究の成果を踏まえて、ランダム行列理論を複雑ネットワークを包括できる形に拡大することにより、ランダム行列の普遍性への理解を深めることを目標とする。また、ランダム行列理論の応用を、複雑ネットワークの研究と結びつけて展開したい。

3. 研究の方法

本研究においては、複雑ネットワークの隣接行列を調べ、固有値分布の特徴をランダム行列理論の予言と比較し、一致しない場合には新しい拡張されたモデルを構築する。場の理論的な方法などの数理物理学の手法を用いて解析を進めるが、これらの手法によって導かれた結果と比較検討するために、また、これらの手法がうまく適用できない場合を扱うために、数値解析の方法による研究も並行して進める。さらに、関連する分野の研究者と議論を行い、構築したモデルの有効性を検証し、応用範囲を拡大する。

4. 研究成果

インターネットなどの現実的な複雑ネットワークにおいては、辺が向きづけられている(辺上に矢印をもつ)場合がある。スケールフリー性をもつネットワークの辺が向きづけられている場合について、複雑ネットワークの数理モデルを構成し、その隣接行列について、頂点数が大きい極限における漸近的な振る舞いを評価する研究を進めた。辺が向きづけられていることから、隣接行列は一般には非対称行列になり、その特異値は実軸上で1次元分布するが、固有値は複素平面上で2次元分布する。まず、ランダム行列理論の技法の一つである場の理論的な方法(レプリカ法)を適用することにより、平均次数が大きい極限において、特異値分布の振る舞いを解析的に評価できる場合があることを示し、特に、特異値分布のすそ野の部分について、べき分布を導出することができた。また、数値的手法により、固有値の複素平面上での広がり性を評価する研究を行った。特に、内向き次数(内向きに頂点に入る矢印の数)と外向き次数(外向きに頂点から出る矢印の数)の大きさによる頂点の順序づけが、固有値分布の広がり性にどのように影響するのかを調べた。

向きづけられた辺をもつランダムネットワークの隣接行列のような非対称な実ランダム行列は、非エルミートランダム行列の例と考えられる。非エルミートランダム行列の普遍性についての基礎的な研究も行った。具体的には、 $N+L$ 次のランダムユニタリ行列の L 個の行と L 個の列を除くことによって得られる N 次の行列を M 個掛け合わせた積について、複素平面上での固有値分布を考え、 N が大きい極限における固有値相関関数の漸近形を解析的に評価した。その結果、非エルミートランダム行列の積に対する従来の評価と一致する漸近形が得られた。したがって、それらの漸近形は、異なるモデルから得られる共通の

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

結果であることから、普遍的なものであると考えられる。非エルミートランダム行列モデルのうち代表的なものについては、2次元流体の統計力学との関係に着目し、複素平面上で直交する多項式の性質を利用することにより解析できることが知られている。これらのランダム行列モデルを拡張して2次元流体モデルを構成し、複素平面上の直交多項式の理論に関連づけることにより、普遍的な振る舞いを導出した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計1件)

G.Akemann, Z.Burda, M.Kieburg and T.Nagao, Universal microscopic correlation functions for products of truncated unitary matrices, J. Phys. A: Math. Theor. 47, 査読有, 2014年, 255202
doi:10.1088/1751-8113/47/25/255202

〔学会発表〕(計6件)

T.Nagao, Spectral density of directed scale-free networks, 研究集会「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」、京都大学, 2019年

T.Nagao, Scale-free networks and random matrices, 2018 Nagoya international workshop on the physics and mathematics of discrete geometries, 名古屋大学, 2018年

T.Nagao, Spectral analysis of scale free networks, Random matrices and their applications, 京都大学, 2018年

T.Nagao, Replica analysis of directed scale-free networks, 研究集会「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」、慶応義塾大学, 2015年

T.Nagao, Correlation functions for products of truncated unitary matrices, RMT2015: Random matrix theory from fundamental mathematics to biological applications, 沖縄科学技術大学院大学, 2015年

T.Nagao, Products of truncated unitary random matrices, 研究集会「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」、京都大学, 2013年

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：楯 辰哉

ローマ字氏名：(TATE, tatsuya)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。