

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 22 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400408

研究課題名(和文)2次元重力ポテンシャル下の等質量3体8の字運動の研究

研究課題名(英文)Three-body figure-eight choreography under the universal gravitation in two dimensions

研究代表者

尾崎 浩司(Ozaki, Hiroshi)

東海大学・清水教養教育センター・教授

研究者番号：00407991

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1)2次元重力を及ぼしあいながら質量が等しい3体が互いに8の字の軌道を追いかけてこするような初期配置と初速度が、数値解析により10桁以上の精度で得られた。

(2)等質量3体の重心が原点に留まり、全角運動量がゼロになるような、周期を T として同一閉曲線を追いかけてこする解は、重力場の構造によらずに、2つの周期関数で記述されることを示した。特に一方の関数は半周期 $T/2$ で符号を替える偶関数で、もう一方の関数は $T/6$ を周期にもつ偶関数であることが、等質量3体8の字解の必要条件になっていることをつきとめた。

研究成果の概要(英文)：(1) We got a set of initial positions and velocities of equal mass three bodies in very high precision (over 10 significant figures) such that equal mass three bodies under their mutual attractions in two dimensions chase each other in an figure-eight orbit.

(2) We found that the equal mass three-body choreographic solution in an arbitrary gravitational force field, to keep the center of mass being at the origin with zero total angular momentum, is constructed by two periodic functions. We also found that the equal mass three-body figure-eight choreographic solution is constructed by two even functions: one changes its sign as $t \rightarrow t + T/2$ and the other has a period of $T/6$.

研究分野：数物系科学

キーワード：3体問題 等質量3体8の字解 拡張された3接線定理 解析解 数値解析

1. 研究開始当初の背景

(1) Moore, Chenciner, Montgomery が見つけた Newton の万有引力下の等質量 3 体 8 の字解(質量が等しい 3 体が互いに引き合いながら、重心を定点に留めつつ全角運動量ゼロを保ちながら、8 の字軌道上を追いかけっこする解：等質量 3 体舞踏解)は、解析的にはまだ解けておらず、どのように攻略するかの指針が必要とされてきた。

(2) 3 体問題における等質量 3 体 8 の字運動のモデルとして、藤原らは 2003 年に、疑似 8 の字形をした Bernoulli のレムニスケート(4 次曲線 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$)上の等質量 3 体舞踏解を構築した。その解は、2 次元重力を与える対数ポテンシャルと斥力を与える斥力ポテンシャルを線形結合した人工ポテンシャルの下で与えられる。藤原らのモデルの修正で、2 次元重力のみを残し斥力を消滅させる手立てがもしも見つければ、2 次元重力下の等質量 3 体 8 の字解析解が得られることになり、ひいては万有引力下の 3 体 8 の字解析解の扉が開くのではないかと期待された。

(3) 藤原らは、3 体間のポテンシャルの構造や 3 体の質量に関係なく、「全角運動量がゼロの 3 体運動においては、3 体の位置で引いた 3 接線は常に 1 点で交わる」という「3 接線定理」(図 1)を見いだしていた。

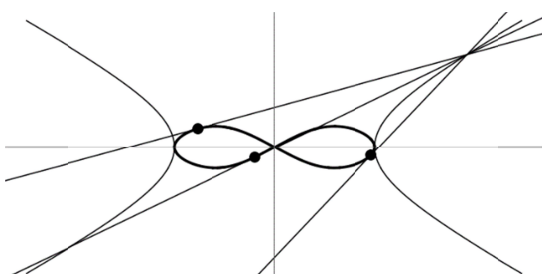


図 1. 3 接線定理：等質量 3 体 8 の字運動でも 3 体の位置で引いた接線は常に 1 点で交わる。

この性質は、等質量 3 体 8 の字の軌道関数に強い制限を与える。8 の字形をした関数を勝手に用意し、重心が原点になるように 3 体を配置したとき、一瞬でも 3 接線が 1 点で交わらないようなものは、即排除されることになるからである。一方で、3 接線定理を満たすような周期解の一般的構造がどうなっているは、まったくもって不明であった。

2. 研究の目的

(1) 2 次元重力を与える対数型のポテンシャル下の等質量 3 体 8 の字解の高精度数値初期条件を求めることを当初の目的とした。

(2) また、2 次元平面上で等質量 3 体 8 の字運動をするなら、本当は、それが 3 次元空間

から平面へ射影された運動になっている可能性もあり、まだ知られていない 3 次元空間内の閉軌道運動を視野に入れることも目的に加わっていった。

(3) 重要なポイントは、平面であろうと 3 次元空間であろうと、3 接線定理を満たすような周期解の一般的構造を明確にすることが、そのまま等質量 3 体 8 の字解析解の構築につながるということである。

3. 研究の方法

(1) 以前、有効数字 4 桁で求めてあった 2 次元重力下の等質量 3 体 8 の字解の数値初期条件について、より数値を絞り込んで精度を向上させ、解析解を探索の足元を固める。

2 次元平面の等質量 3 体運動方程式を複素平面上の運動方程式に焼き直し、Laurent 展開によって運動方程式を与える特異点の位数に関する制限式から解を探る。これは、本研究課題に取り組む前に Texas 大学の Petrosky 教授から「自分だったらこう攻める」とアドバイスを受けたことが発端となっている。

(2) 3 次元空間内の閉曲線の平面への射影が、ちょうど Bernoulli のレムニスケートになるようなもので、かつ、重心を定点に保ちながらその閉曲線上を等質量 3 体が追いかけっこするような模型解をつくる。3 次元空間に設けた慣性系に対して等質量 3 体が互いの引力だけで立体閉軌道を描く具体的な周期解探索への第一歩にはなることが期待される。

(3) 研究を始めた当初は、3 接線定理を満たすような解の一般的構造がどうなっているのか、また実際にどう構成してゆけばいいのか、筆者は皆目見当がつかずにいた。研究の途中から研究分担者として加わった松田は、3 接線定理を満たす解を組み立てるには、どうすればよいかを深く考察し、具体的構成法を見出した。松田の構成法に基づき、周期関数によって等質量 3 体 8 の字解析解へと迫る。松田の構成法によれば、解の構造はポテンシャルの構造に関係ないため、統一的視点から等質量 3 体 8 の字解を俯瞰できるものと期待される。

4. 研究成果

(1) 2 次元重力を与える対数型のポテンシャル下の等質量 3 体の運動方程式は、以下のようになる(質点 1 についてのみ記すが、質点 2, 3 についても同様)。また、等質量 3 体は 2 次元平面上を運動するので、実空間の運動方程式を、複素変数を使って複素平面上の運動方程式に表すこともできる。実空間での運動方程式は

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - \frac{y_1 - y_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

複素平面上の運動方程式に書き換えれば、

$$\frac{d^2x_+}{dt^2} = \frac{1}{\Delta x_-(t)} - \frac{1}{\Delta x_-(t - \frac{T}{3})}$$

ここで

$$x_+ = x_1 + iy_1,$$

$$\Delta x_-(t) = x_1 - x_2 - i(y_1 - y_2),$$

$$\Delta x_-(t - \frac{T}{3}) = x_1 - x_3 - i(y_1 - y_3).$$

x_+ が Laurent 展開可能で k 位の極をもち、 $1/\Delta x_-$ も Laurent 展開可能で $k+m$ 位の極をもちと仮定する。このとき $m=2$ が複素平面上の運動方程式が成立するための必要条件であることがわかる。

藤原らの等質量 3 体疑似 8 の字運動の運動方程式は、 x_+ について

$$\frac{d^2x_+}{dt^2} = 2a^* \left(\frac{1}{\Delta x_-(t)} - \frac{1}{\Delta x_-(t - \frac{T}{3})} \right) + \frac{2b^*}{a^*} x_+$$

にまとめることがわかっている。レムニスケートの場合、 x_+ が母数を $k^2 = (2 + \sqrt{3})/4$ とする 1 位の極をもつ Weierstrass の関数の和で表され、2 回の時間微分をとることで、左辺は 3 位の極をもつ。一方で $1/\Delta x_-$ は 3 位の極と 1 位の極をもつので、1 位の極を打ち消すような第 3 項目が存在する。

2 次元重力を与える対数型重力ポテンシャルの場合、 x_+ が上記の母数とは異なる値をとるだけで、同じように 1 位の極をもつ Weierstrass の関数の和で表されるかもしれないと予想し、考察した。この場合 $1/\Delta x_-$ は 3 位の極を持つ Weierstrass の \wp' 関数の 1 次結合で表されることが 2 次元重力だけの運動方程式を満たすための必要条件となる。そうすると Δx_- は 3 位の零点を持たねばならない。まず Δx_- のゼロ点のまわりで Δx_- を Taylor 展開した。続いて $1/\Delta x_-$

が 3 位の極を持つように、定数項と時間についての 1 次の係数がゼロになることを要請し、Weierstrass の \wp' 関数の 1 次結合が Weierstrass の関数の和で書けるような母数探しを行った。慎重に解析を進めたが否定的結果しか得られず、レムニスケート上の 3 体舞踏解の単純な拡張では、本研究課題を解決するに至らないと結論付けた。

つぎに、等質量 3 体 8 の字解の初期条件について述べる。解がスケール不変性ならば 8 の字軌道の腕の長さを 1 に規格化してよい。このとき初期条件は 2 個のパラメーターで完全に押さえられてしまう。筆者は、2007 年に静岡県立大学の大学院生 朱 暁亮が修士論文に記した 3 体の位置と速度についての 12 個の高精度初期値について、その立場から再検討を行った。2 次元重力を与える対数型のポテンシャル下の等質量 3 体 8 の字解が二等辺三角形配置をとるときを初期時刻に定める。初期位置と初速度は 2 個のパラメーター y_0 と v_0 で表せて

$$q_1(0) = (1, 0), q_2(0) = (-1/2, y_0),$$

$$q_3(0) = (-1/2, -y_0),$$

$$v_1(0) = v_0(0, -2y_0), v_2(0) = v_0(-3/2, y_0),$$

$$v_3(0) = v_0(3/2, y_0),$$

と書ける(図 2)。

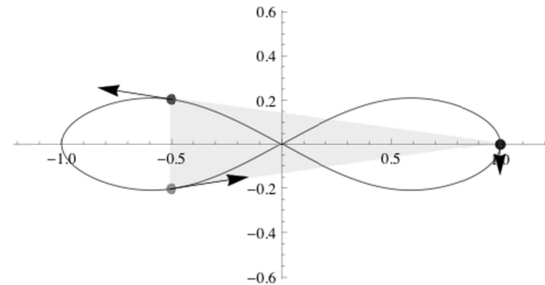


図 2. 2 次元重力下の等質量 3 体 8 の字解の二等辺三角形配置と速度の関係

朱の結果を再検討し、高精度初期値を与える 2 個のパラメーターは

$$y_0 = 0.20357314654465158,$$

$$v_0 = 0.85799269405049620,$$

であることをつきとめた。

(2) 3 次元空間内の回転座標系で等質量 3 体が閉軌道を描く数値解は、以前から知られている。一方で、3 次元空間に設けた慣性系に対して等質量 3 体が閉軌道を描くような周期解はまだ数値的にも知られていない。等質量 3 体 8 の字軌道や 3 接線が 3 次元空間内の閉軌道運動の平面への写像になっているような立体周期解があるのではないかと考え、立体閉軌道がレムニスケートになるようなモデルを 2 つ作製した。残念ながら、どちらも全角運動量が定ベクトルにならず、時間変化を伴うことが判明した。2 つのモデルは、極めて非物理的なものだったのである。ただし、この研究を通して、思わぬ発見へと誘われた。

模型では立体軌道から平面への射影によってできる3体の影は、平面上で全角運動量がゼロの運動をする。したがって、3体の影は3接線定理を満たす。そこで、3次元空間内を運動する3体(等質量に限定しない一般質量で構わない)を平面に射影したとき、3接線定理が成り立つようにするには、どのような平面への射影をとればよいかを藤原らと検討した。我々は、一般質量の3体が3次元空間を運動する場合、全角運動量に平行な平面への射影を行うと、3接線定理が成り立つことを示した。これを拡張された3接線定理と名付け、天体力学N体力学研究会ならびに国際会議AIMS2014で、その成果を発表した。この結果は、Proceedings of 2014 Symposium on Celestial Mechanics and N-Body Dynamicsに掲載された。

似たような性質は、谷川-桑原によって3次元空間における3接線定理の拡張として2006年に発表されている。彼らの3接線定理の拡張は、3体の運動を射影する平面が慣性系のx-y, z-x, y-z平面に限定されているのが特徴である。このため、一般的には3接線の影は1点で交わらず、3接線の影で囲まれる三角形の面積と全角運動量に関係が付く。我々のオリジナリティーは、3接線定理を拡張するにあたり、3接線の影が常に1点で交わるような平面と全角運動量との関係を考察した、ということにある。

(3)2014年から、松田克己に研究分担者に加わってもらった。彼の参入で、等質量3体8の字解の攻略法が明確になり、3体問題に新しい視点が持ち込まれた。以下では、松田によって導入された等質量3体8の字解の構成法を「松田の構成法」と呼ぶことにする。

等質量3体8の字解は平面上の周期解であり、(i)重心が定点に留まる(ii)半周期においてクラインの四元群条件を満たす(iii)全角運動量がゼロである、という性質をもつ。等質量3体8の字解の周期を ω 、等質量3体の座標を $q(t) = (x(t), y(t))$ とあらわすと、解がもつべき条件式は、以下のように書ける：

(i)重心条件

$$q(t) + q(t + \omega/3) + q(t + 2\omega/3) = (0, 0),$$

(ii)Klein 四元群条件

$$\begin{aligned} q(t + \omega/2) &= (-x(t), y(t)), \\ q(-t + \omega/2) &= (x(t), -y(t)), \end{aligned}$$

(iii)角運動量条件

$$\begin{aligned} (x_0\dot{y}_0 - \dot{x}_0y_0) + (x_1\dot{y}_1 - \dot{x}_1y_1) \\ + (x_2\dot{y}_2 - \dot{x}_2y_2) = 0. \end{aligned}$$

松田は、藤原らのレムニスケート上の等質量3体舞踏解の構造にヒントを得て、つぎのように等質量3体の座標のy成分をx成分に比例させる形に採り、上記の3条件を、等質量3体の番号について巡回表示をもつ同値表現に書き換えた。それが松田の構成法である。

松田の構成法を以下に詳しく述べる。まず、等質量3体の座標を、 $i = 0, 1, 2$ として

$$x_i(t) = x(t + i\omega/3),$$

$$y_i(t) = c_i(t)x_i(t)$$

とあらわす。ここで $c_i(t) = c(t + i\omega/3)$ と書けて、 $c_i(t)$ は周期の周期関数である。 $c(t)$ を座標比関数と呼ぶことにする。

重心条件(i)は、等質量3体の座標をつぎのようにあらわすことと同値である：

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \lambda(t)(c_1(t) - c_2(t)), \\ y_0(t) &= \lambda(t)c_0(t)(c_1(t) - c_2(t)). \end{aligned}$$

残りの座標は下付き添え字0, 1, 2を巡回置換したものの $\lambda(t)$ は周期 $\omega/3$ をもつ関数である。

Kleinの四元群条件(ii)は、つぎのような表現と同値である： $c_i(t)$ が半周期性をもつ偶関数、すなわち $c_i(t + \omega/2) = -c_i(t)$ で、さらに $\lambda(t)$ は周期 $\omega/6$ の偶関数である。

角運動量条件(iii)は、つぎのように表すことと同値である：

$$\dot{c}_0(c_1 - c_2)^2 - \dot{c}_1(c_2 - c_0)^2 - \dot{c}_2(c_0 - c_1)^2 = 0.$$

周期の関数 $\lambda(t)$ と周期 $\omega/3$ の座標比関数 $c(t)$ があれば、重心がゼロで全角運動量ゼロの等質量3体舞踏解(同一閉軌道上の舞踏解)が得られる。さらに $\lambda(t)$ が周期 $\omega/6$ の偶関数で、座標比関数 $c(t)$ が半周期交代性をもつ偶関数ならばKleinの四元群条件をも満たすものになり、等質量3体8の字解を与える。 $\lambda(t)$ と $c(t)$ は、まさに、そうした性質をもつ関数ということになる。

さて、勝手に用意した座標比関数 $c(t)$ では、

$$\dot{c}_0(c_1 - c_2)^2 - \dot{c}_1(c_2 - c_0)^2 - \dot{c}_2(c_0 - c_1)^2 = 0$$

が成立するとは限らない。松田は、角運動量条件を満たさない座標比関数 $c(t)$ から角運動量条件を満たすように関数を補正する方法も見出した。勝手に用意した $c_i(t)$ で周期 $\omega/3$ の補正関数 $\varepsilon(t)$ を作ると(積分形)、 $c_i(t) + \varepsilon(t)$ が角運動量条件を満たすようにできるのである。等質量3体の重心はこの補正の影響を受けず、新たな困難は生じない。

松田は簡単な例として、 $c(t) = \cos t$ を取り上げた。角運動量条件は満たされない。松田は補正関数 $\varepsilon(t)$ を計算し、 λ を定数に採り

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t, \\ y(t) &= \sin t (\cos t + 6^{-1} \cos 3t), \end{aligned}$$

を導いた。重心原点、Kleinの四元群、角運動量条件のすべてを満たす、これぞ、まさに8の字舞踏解である。松田は、さらに、この媒介変数表示が表す等質量3体の軌道が、

$$36y^2 = x^2(1 - x^2)(7 - 4x^2)^2$$

の8次代数曲線になることも示した。この等質量3体舞踏解は、藤原らのレムニスケートについて2番目に見つかった8の字型の解析

解である。残念ながら、これは疑似8の字解に属し、Newtonの万有引力下の等質量3体8の字解でも、2次元重力下の解でもない。

松田の構成法の優れている点は、等質量3体8の字解析解の本質を、ポテンシャルの構造に依らずに、半周期交代性をもつ偶関数 $c(t)$ と、 $\omega/6$ を周期にもつ偶関数 $\lambda(t)$ とに集約させたところにある。

松田は、任意の斉次型引力ポテンシャルの場合、等質量3体の運動方程式から $\lambda(t)$ についてBernoulliの微分方程式が得られること、 $\lambda(t)$ が $c(t)$ によって決定することまでも明らかにした。これによって、等質量3体の運動方程式は座標比関数 $c(t)$ が満たす関数方程式に読み替えられる。その方程式を解くことは、等質量3体8の字解析解を得ることと同値である。

これらの結果は、天体力学N体力学研究会2015と日本数学会年会2016で発表した。

松田の構成法で等質量3体8の字解析解の構造が明確になったことは、3体問題の研究に確固とした礎が築かれたことを意味するはずである。松田が得た一連の成果は、論文にまとめる予定である。

筆者は松田の構成法に従い、2次元重力を与える対数型のポテンシャル下の等質量3体8の字解析解を見出すべく計算を続けたが、本課題期間中に解析解にたどり着くことはできなかった。乗り越えられずにいる箇所をもう一度精査し、解析解への突破口を見出したいと考えている。松田の構成法により、いろいろなポテンシャル下の等質量3体8の字解が統一的に記述できるようになったことで、ようやく頂上へ向けてのルートが見えてきた。今後も松田とともに研究を押し進め、登頂を目指し挑戦し続けるつもりである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

(1) 尾崎 浩司, 谷口 哲也, 福田 宏, 藤原俊朗,

“Three-tangents theorem in three-body motion in three-dimensional space”, Proceedings of 2014 Symposium on Celestial Mechanics and N-Body Dynamics November 13-14, 2014 at SMBC Event Space (Chiba), Chiba, 査読なし, (2)1-5, (2016). <https://sites.google.com/site/instclassicalmech/shu-xue-jiao-yu-yan-jiu/2014-chiba>

[学会発表](計5件)

(1) 松田 克己

“等質量平面3体問題の8の字厳密解について”, 日本数学会年会, 筑波大学, 茨城県つくばみ

らい市, 2016年3月16日.

(2) 松田 克己

“重心ゼロ角運動量ゼロの等質量3体の8の字軌道の構成について”, 天体力学N体力学研究会2015, SMBC イベントスペース(千葉), 千葉県千葉市, 2015年12月25日.

(3) 尾崎 浩司

“Three-tangents theorem in three-body motion in three-dimensional space”, 天体力学N体力学研究会2014, SMBC イベントスペース(千葉), 千葉県千葉市, 2014年11月14日.

(4) Katsumi Matsuda

“Complex Analytic Aspects of the 3-tangent Theorem on the Planar 3-body problem”, The 10th American Institute of Mathematical Sciences Conference, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, 9 July 2014.

(5) Hiroshi Ozaki

“Three Tangents Theorem in Three-body motion in Three-dimensional Space”, The 10th American Institute of Mathematical Sciences Conference, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, 9 July 2014.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

尾崎 浩司 (OZAKI, Hiroshi)

東海大学清水教養教育センター・教授
研究者番号: 00407991

(2) 研究分担者

松田 克己 (MATSUDA, Katsumi)

東海大学清水教養教育センター・准教授
研究者番号: 10297195

(3) 連携研究者 なし