

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 10 月 26 日現在

機関番号：38005

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400414

研究課題名(和文) ランダム行列理論の双対性とその応用

研究課題名(英文) Duality of random matrix theory and its application

研究代表者

氷上 忍 (Hikami, Shinobu)

沖縄科学技術大学院大学・数理理論物理学・教授

研究者番号：30093298

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：外場のあるランダム行列理論での双対性定理を使い、モジュライ空間でのトポロジカル普遍量を計算する手法を開発した。モジュライ空間でのスピンを持った曲線の交点数を具体的に計算し、その意味を例えばアーベル多様体でのオイラー標数と比べ議論した。向き付け不可能な曲面の場合にも双体性定理を拡張し、トポロジカル普遍量を計算した。また、DNAやRNAの統計的分布計算にランダム行列理論のガウス分布平均を応用し、生物学への応用の研究も行った。

研究成果の概要(英文)：By the use of duality theorem of random matrix theory with external source, the method of the evaluation of topological invariants in moduli spaces is developed. The intersection numbers of p-spin curves of moduli spaces are evaluated explicitly, and they are compared with Euler characteristics of Abelian varieties. The non-orientable surface also is investigated and intersection numbers, Euler characteristics are obtained.

For the applications to DNA or RNA distribution problem, Gaussian means of random matrix theory is considered as biological applications.

研究分野：統計力学

キーワード：ランダム行列 リーマン面 トポロジー

1. 研究開始当初の背景

ランダム行列理論は統計現象やエネルギー準位などの物理現象に応用できる数学的理論である。その普遍性により興味深い現象が系統的に説明できるので、その基礎研究は重要である。リーマン面のモジュライ空間の関する普遍量もランダム行列理論を使って計算することが出来るので、トポロジでのオイラー標数などの計算に重要な役割を果たす。ランダム行列模型は弦理論と密接な関係があり、閉じた (close) 弦を記述する模型として提案され、2次元重力を始め厳密解が得られるので有用な方法となっている。

生物などの複雑系ではネットワークの問題などランダム行列理論が適用できる問題が多い。ランダム行列に外場が結合した理論は最近見出されたが、この理論が持つ双対性はこれらのトポロジカルな複雑系の理解に役立つ。

この外場が結合したランダム行列模型は外場を調整することにより、興味深い様々な特異点を記述できることが最近判明して、可積分系やトポロジ、代数幾何の他分野からも注目を集めていて、新しい研究分野を形成しつつある。

2. 研究の目的

今回の研究はこの様々な多様体の特異点に注目して、ランダム行列理論の双対定理を使い、具体的にトポロジカルな普遍量を計算することにある。

様々な複雑系を理解するのにランダム行列理論が有効であることを検証し、生物系から物性論、数理理論までランダム行列理論を幅広く適用して、新しいランダム行列理論の普遍性を理解する研究を行う。ランダム行列理論による普遍性の出現理由を理解するために様々な普遍性クラスで成り立つピラソロ方程式や  $W_n$  代数、グロモフ-ウィッテン普遍量を双対性定理から導出し、普遍性を理解するための基礎研究を行う。

外場があるランダム行列模型は、外場を調整することにより  $SU(2)_k/U(1)$  の Wess-Zumino-Witten 模型を与えている。レベルを表すパラメータ  $k$  はリーマン面の  $p$ -スピン曲線と  $p=k+2$  の関係にあり、 $p$  を変化させることにより、特異点の性質を変化させることができる。

$p$  が負数の場合は  $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$  の多様体が生成され、2次元ブラックホール解とのつながりが見られる。

また  $p$  が無限大の場合は解くことができるので、その解の物理的意味を探りたい。

ランダム行列理論はリーマン面のモジュライ空間の交点数の生成関数とな

っているので、その  $p$  依存性 ( $p$  多項式) を可能な限り具体的に調べ、新たな知見を得たい。

3. 研究の方法

(1) リーマン面のモジュライ空間での  $p$ -スピン曲線の交点数の計算とその生成関数が満たす方程式系の研究。曲線とアーベル多様体との違いの研究。

計算で  $p$ -多項式を高次の種数  $g$  まで行い、その様子を見る。また、 $p$ -多項式の最大オーダーの係数がアーベル多様体のオイラー標数と関係するので、その詳細な比較を行う。例えば種数  $g=1$  では  $(p-1)/24$  である (Deuring の公式)。

(2) open/close 交点数。ランダム行列による開いた曲線 ( $D$ -プレーン) の記述とその交点数の計算。

通常ランダム行列理論に対数項を追加すると興味深い新しい模型が得られる。これを Kontsevich-Penner 模型と名付ける。この Kontsevich-Penner 模型は開いたリーマン面 (境界を持ったリーマン面) を記述するので、open string 模型 (ゲージ場) を含んだランダム行列模型となり、その具体的な分配関数を求め、その係数として交点数を求める。

(3) Lie 代数の BC 型によるランダム行列理論と向き付け不能な曲面上の曲線の交点数の関係の研究。

Lie 代数の  $o(n)$ ,  $sp(n)$  をランダム行列とすると  $u(n)$  の場合と同様、分配関数や交点数を求めることができる。 $U(n)$  と違い、向き付け不能な曲面 (例えばクライン壺) が生成され、オイラー標数 (オービフォールド) などを計算することができる。

(4)  $P_1$  のグロモフ-ウィッテン普遍量をランダム行列模型により計算する。

ランダム行列の要素を周期的な変数に変えることにより、(例えば  $\sin$ ,  $\cos$  など) 新しい多様体の研究を行うことができる。その最初の研究として、ガウス分布のランダム行列で複素射影多様体  $CP^1$  (略して  $P_1$ ) の分配関数とその係数であるグロモフ-ウィッテン普遍量を計算する。

以上の4つの問題を外場があるランダム行列理論の双対性定理を使い研究する。

#### 4. 研究成果

- (1) 種数  $g$  が 9 次のオーダーまで  $p$ -スピン曲線の交点数を計算し、アーベル多様体の標数  $p$  のオイラー標数と比較した。種数  $g=1$  の時は  $(p-1)/24$  となり Deuring の公式と一致する。 $g=4$  以上の次数で係数の不一致が見られ、これは両者の次元が異なることによることが判明。
- (2) open/close 交点数。最近 Pandharipande らにより open 交点数の研究が行われたが、これは以前対数項を含むランダム行列模型 (Kontsevich-Penner 模型) と同一であることを議論し、その交点数を求めた。さらに双対定理により高次のレベル数の場合を求めた。また Ramond-Ramond 項と呼ばれる場合も関係することを見出した。2015 年 3 月に OIST にてモジュライ空間の研究会を行い、この open/close duality を議論した。
- (3) Lie 代数の BC 型を用いたランダム行列を研究し、向き付け不能な曲面を記述するものであることを示した。フェルミオンの性質を持つことが示された。
- (4)  $P1$  の場合の Gromov-Witten 普遍量をランダム行列により計算し、任意のオーダーを求める公式を得た。結果は知られている低次のオーダーの結果と一致がし、ランダム行列理論の有効性が確かめられた。

なお、生物系への応用は分担者の吉川が 2015 年 10 月の OIST での国際ワークショップでランダム行列とたんぱく質のネットワークの研究を発表した。

(1)-(4)の結果は Brezin との共著としてまとめ、近々印刷公表する予定である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

E. Brezin and S. Hikami, Random matrix, singularities and open/close intersection numbers, J. Phys. A 48, 475201 (2015).

[学会発表](計 5 件)

- (1) S.Hikami, Random matrix and open/close intersection numbers, MCM2015 OIST 国際ワークショップ、2015 年 3 月 18 日。
- (2) S.Hikami,  $p$ -spin curve and Euler characteristics, 東大数理研究科、2015 年 10 月 29 日、MCMautumn 国際研究会。
- (3) A. Kikkawa, Random matrix analysis for molecular networks in biological systems. RMT2015 OIST 国際ワークショップ。2015 年 11 月 5 日。
- (4) S.Hikami Moduli space and random matrix theory with an external source, Riken-Osaka-OIST-Taiwan mathphys workshop, 2015, 3 月 3 日、OIST.
- (5) S.Hikami, Duality and topology in random matrix theory, Riken-OIST mathphys workshop, 2014 年 2 月 26 日、OIST.

i

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

<http://www.oist.jp/ja/> 数理理論物理学ユニット

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

氷上 忍 (Hikami, Shinobu)  
沖縄科学技術大学院大学・  
数理理論物理学ユニット・教授  
研究者番号：30093298

### (2)研究分担者

吉川あゆみ (Kikkawa, Ayumi)  
沖縄科学技術大学院大学・  
数理理論物理学ユニット・研究員  
研究者番号：30572341

### (3)連携研究者

なし