

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400451

研究課題名(和文)地球連続体の不均質非線形変形機構の理論的研究

研究課題名(英文)Theoretical study of inhomogeneous-nonlinear deformation mechanics in earth continuum

研究代表者

山崎 和仁 (Yamasaki, Kazuhito)

神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：20335417

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：断層欠陥場は、非整数次元で特徴付けられる内部構造をもつ変形現象の典型例であり、それを分数階微積分学に基づいて考察した。一般化されたラプラス方程式の非整数グリーン関数から、非整数次元と方程式の分数階との関係式が得られる。横ずれ断層周辺の変位場は一般化されたラプラス方程式で記述されるので、上記の結果を適用した。横ずれ断層に関する観測データから、断層周辺空間の非整数次元を見積もった。これは、断層周辺領域における変形の非局所性を定量化したものである。また、一般化されたラプラス方程式をさらに一般化した非整数ナビエ方程式による変形場を、記述する手法も考察した。

研究成果の概要(英文)：Based on fractional calculus, we considered the fault zone as a typical example of the deformed medium including internal structures characterized by the fractional dimension. The fractional notation of the Green's function for the generalized Laplace field gives a relationship between the fractional dimension and the fractional order of the equation. We applied the relationship to the displacement field around the strike-slip fault characterized by the generalized Laplace equation. From the observed data for the strike-slip fault, we calculated the fractional dimension of the fractional deformation field. This result implies that the non-locality of the deformation field increases toward the fault. Moreover, we suggest the heuristic method of deriving the displacement field of the fractional Navier equation in the semi-fractional case.

研究分野：数物系科学

キーワード：断層 欠陥場 変位場 変形場 分数階微分 非線形 非局所 非平衡

1. 研究開始当初の背景

不均質性と非線形性が複雑に絡み合った岩石の変形機構は、他の物性系分野では見られない地球科学特有の現象であり、近年、様々な新規データが、実験・観測分野で集積しつつある。この現象の本質は、岩石の非局所的な変形機構にあり、その理論的記述は連続体力学に基礎を置くが、十分には成功していない。

2. 研究の目的

非局所的関数を記述する数学理論として、分数階微積分がある。連続体力学は微積分に基づくので、これを分数階微積分に置き換え、地球連続体力学を再構築し、岩石の非局所的変形機構を考察する。

3. 研究の方法

連続体力学において最も基本的な方程式である保存則と構成則を、分数階微積分により、非局所的な系へと拡張する。この結果と、非局所的変形現象に関する岩石実験の結果とを比較・検討し、拡張された保存則と構成則の有意性を示す。連続体力学の基礎方程式は保存則と構成則からなるので、この結果は、導かれる基礎方程式の有意性を同時に意味するものである。この分数階（非整数階）で記述された基礎方程式とそれから導かれる結果を、整数階の場合にまで縮退したとき、既存の結果が再現されるかを確認する。さらに、基礎方程式に摂動を加えてグリーン関数を求め、簡単な系ではあるが、観測・実験データとの比較をおこない、自然界にみられる非局所性を、微積分階数の非整数値として定量化する。

4. 研究成果

最初に、基礎方程式である連続の式を、非整数空間内で考察した。これにより、質量密度が一定ならば変位の発散はゼロ、という変

形理論の初歩的“常識”すら、非整数値の場合には成立しないことが分かった。これは、非整数空間内の変形を記述する際において、アприオリな仮定は非常に危険であることを意味する。つまり、基礎方程式自体を、分数階微分にもとづき再構成しなければならない。そこで次に非整数空間内における Navier 方程式の導出を考察した。

断層場を含む地殻空間（＝非整数次元をもつ空間）の、質量保存則および歪みと変位の関係式は微分を含むので、通常の数階微分を、全て分数階微分に置き換える。構成則（Hooke の法則）は微分を含まないので、そのまま使える。以上3式から、非整数次元空間における Navier 方程式が導出される。横ずれ断層を考えた場合、この方程式は（一般化された）ラプラス方程式へと近似できる。このとき、空間の非整数次元と方程式の分数階との関係式が得られる。これから、空間の非整数次元が減少すると、方程式の分数階は増加することが分かった。分数階の増加は、変形場の非局所性を反映する。

つまり、非整数次元の値は、変形の非局所性を定量化するうえで、非常に有用であることが示唆される。従って、この非整数次元の値をみつめる手法を次に考察する。

通常、岩石変形におけるダイラタンシー効果の空間変化率と、変位勾配に関するダイラタンシーは一致する。しかしながら、非整数空間における分数階微分の非可換性から、この二つは厳密に区別しなければならないことが示される。逆に、この不一致性から、岩石変形における上記の非可換性、つまり次元の整数値からのずれを、定量化できる可能性が示唆される。

従来の断層周辺の変位場データを、分数階微分の観点から再解析し、非整数次元数の空間変化を考察した。データは 1992 年の Landers 地震 (M7.3) の干渉 SAR による観測値を用いた (図 1)。結果、断層に近づくに

つれて次元が減少することが示された（図2）。一方、岩石破碎に関する Fractal 次元は断層に近づくにつれて増加することが知られている。

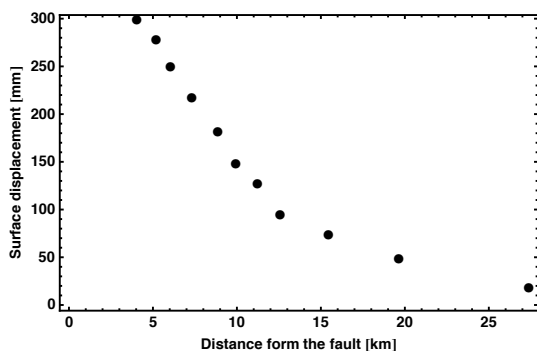


図 1

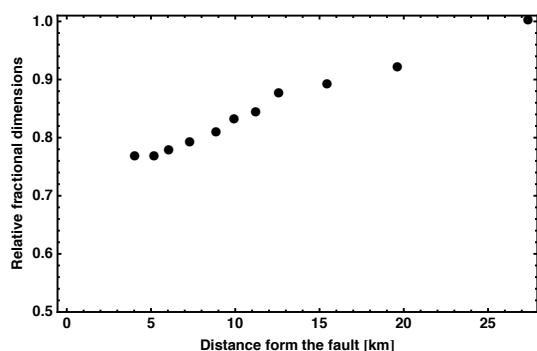


図 2

上記の結果は、分数階微分における非整数次元と、従来の Fractal 次元との間に定量的な関係があることを示唆する。具体的には、反比例関係にあることが示唆された。これは、従来の Fractal 解析が破碎パターンそのものに着目しているのに対し、分数階微分による解析では、破碎パターンが生じる場そのものを記述している為が生じる。Fractal 次元の見積もりを広範囲で行うことは難しい。一方、変位場の広範囲な測定は様々な手法で行われている。このデータに本研究で提案した手法を適用すれば、広範囲における非整数次元が見積もられる。これを、非正数次元と Fractal 次元との関係式に適用すれば、断層

周辺における Fractal 次元の広範囲な見積もりが可能になる可能性がある。

次に、点震源により生じる 1 次元空間の弾性波動を、分数階微分の場合に計算した。エネルギーの散逸などは考えていないので、整数次元の場合、振幅一定の波が生じるが（図3の点線）、非整数次元の場合、断層に近づくほど振幅が増加することが分かった（図3の実線）。つまり、媒質自体が一樣であったとしても、分数階微分による変形の局所化が生じることが分かった。

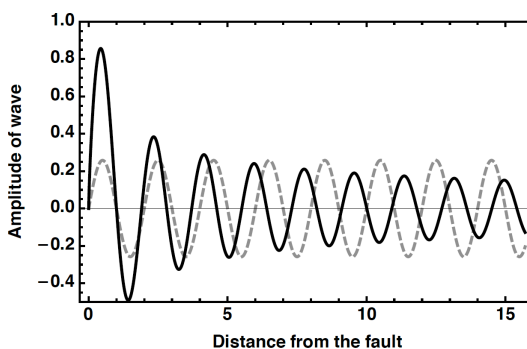


図 3

今後は、上記の結果を 3 次元の場合にまで拡張し、また、断層も点震源ではなく有限領域のものを考えて、断層破碎帯における地震波動の局所化現象との関係を考察する予定である。また、以上の結果は、断層周辺における変形場の非局所性を考察したものである。次に、変形場の非線形から来る非平衡領域の安定性に関する研究も行っていく予定である。

この解析には、KCC 理論に基づくヤコビ安定性が有用であるが、その研究対象は常微分方程式である。一方、変形場の記述は偏微分方程式で行われるため、KCC 理論をそのまま適用することはできない。そこで、常微分方程式で近似しうる簡単な変形系を考え、それに KCC 理論を適用するという解析を行ったので、その研究成果も以下のべる。

2 階の常微分方程式は、フィンスラー的配

位空間における測地線方程式と見なすことができる。このとき、測地線方程式から導出される非線形接続から、ベルワルド接続および偏差曲率が導出できる。

この偏差曲率の成分の正負から、系の安定性を記述できる。特に平衡点付近では、いわゆる固有値問題に近似でき、偏差曲率が負の場合はヤコビ安定、正の場合がヤコビ不安定となる。前者の場合、力学系の軌道に摂動を加えても、もとの軌道に戻る軌道安定性を示す。一方、後者の場合は、摂動に寄る影響が時間とともに指数関数的に増大する。つまり、ヤコビ安定とは従来の解析におけるスパイラルに対応し、不安定な場合はノードに対応する。では、従来の線形安定、不安定は何に対応するのだろうか。これは、非線形接続により記述されることが分かった。以上の結果をまとめたのが、図4である。

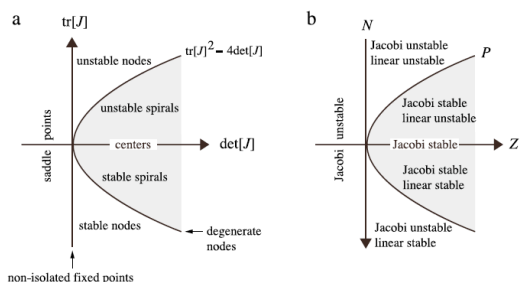


図4

例えば、安定ノード（図4 a）は、KCC 理論的には、線形安定かつヤコビ不安定（図4 b）に対応する。これにより、従来の変形系の安定性を、KCC 理論に基づき微分幾何学的に解釈可能になる。

例えば、簡単な変形系を記述する二つの独立した変数を考える。平衡点付近では、これら二つの変数の安定性は同期し、それ特徴づける量は定数となる。これは、従来の解析結果と一致する。一方、平衡点から離れた領域では、二つの変数の安定性は同期せず、時間

に依存することが分かった。これは、平衡点付近の安定性解析では見られない、新しい解析結果である。

今後は、上記の解析結果を、複雑化した断層周辺の変形場に適用し、非平衡領域における安定性を考察していく予定である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計2件）

(1) T. Yajima, K. Yamasaki, **Jacobi stability for dynamical systems of two-dimensional second-order differential equations and application to overhead crane system, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, 査読有り, Vol. 13, 2016, 1650045(16 pages).

(2) K. Yamasaki, T. Yajima, **Fractional calculus approach to the deformation field near the fault zone, Austin Journal of Earth Science**, 査読有り, Vol. 2, 2015, 1018-1012.

〔学会発表〕（計1件）

(1) 山崎 和仁、断層破碎帯における岩石変形の分数階微分に基づく考察、日本地質学会、2015.9.11、信州大学（長野県）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 和仁 (YAMASAKI, Kazuhito)
神戸大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：20335417

(2) 研究分担者

谷島 尚宏 (YAJIMA, Takahiro)

宇都宮大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：00548141