2版

様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号： １２５０１

研究種目： 挑戦的萌芽研究

研究期間： 2013～2015

課題番号： ２５５４０１０６

研究課題名（和文） 連分数とスケール不変な一般化指数関数による複雑系の情報構造の解明

研究課題名（英文） Elucidation of information structure behind complex systems using continued fraction and scale invariant generalized exponential function

研究代表者

須鎗　弘樹（Suyari, Hiroki）

千葉大学・融合科学研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０２４６６８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：カオス，フラクタルなどの複雑系と呼ばれる分野では，べき分布が特徴的に現れる．このべき分布を指数関数の一般化としてとらえることにより，系統的に複雑系の構造が説明できることが近年わかってきた．本研究では，q-指数関数の自己相似性を用いて，連分数の近似精度に関する成果を得たが，当初得られると思っていたマルチスケールカントールの関係は未解明のままである．しかし，その研究過程で，従来の大偏差原理を特別な場合として含む，より一般的な大偏差原理の存在を示唆する重要な結果を得た．具体的には，q-指数関数から一般化二項分布を発見し，それより，α-ダイバージェンスがレート関数として初めて現れる重要な結果を得た．

研究成果の概要（英文）：Power distribution is ubiquitous in complex systems such as chaos and fractals. A power distribution can be represented as a generalization of an exponential function, so that the information structure behind complex systems can be systematically expressed in terms of a generalized exponential function. In this work, using the self-similarity in the q-exponential function, the relation between continued fraction and q-exponential function is found, but the the relation to the multi-scaled cantor set is still missing. However, in the process of this work, we obtain the important result on the large deviation principle generalized for the q-exponential function. Concretely, we derive the generalized binomial distribution uniquely determined by the q-exponential function and obtain the alpha-divergence as the rate function for the first time.

研究分野： 情報数理

キーワード： q-指数関数　スケール不変　自己相似

１．研究開始当初の背景

本研究は，自然界や社会に観測されるデータの多くが，何故，べき分布にしたがうのかという問題に端を発する．数学的視点では，従来の数理研究で扱われてきた分布の多くが指数関数族に属し，物理的視点では，従来の統計力学における平衡分布が指数関数で表現されている．しかし，自然界や社会で，現実に観測される分布は，べき分布が多く，理論が現実を説明できているとは言いがたい．このような素朴な疑問に対して，1988 年に統計物理学者の Tsallis が従来の Boltzmann-Gibbs 統計力学の一般化を意図して，Shannon エントロピーの１パラメータ拡張である Tsallis エントロピーを提案した．Jaynes による統計力学の再構成にならって，この一般化エントロピーを最大化することによって，平衡分布として，べき分布を含む一般化統計力学（今日，Tsallis 統計力学と言われる．）を構成しようとした．この一般化エントロピーの導入は直観的ではあったものの，実際には，非常に基本的な非線形微分方程式から出発して統一的に展開できることがわかってきた．具体的には，指数関数の特徴付けである基本的な線形微分方程式を１パラメータ拡張した非線形微分方程式から展開できる．その数理は，簡潔には，次のような表でまとめられ，詳細は，代表者の単著「複雑系のための基礎数理（牧野書店，2010)」に詳しい．

	指数関数族	べき関数族
基本方程式	dy/dx=y	dy/dx=y^q
基本関数	指数関数	q-指数関数
基本情報量	Shannon エントロピー	Tsallis エントロピー
乗法	積	q-積
q	1(独立性)	q(一般化次元の q)
ダイバージェンス	KL ダイバージェンス	αダイバージェンス

Jaynesのエントロピー最大化原理による統計力学の再構成（1957）は，Shannonの情報理論の誕生（1948）を受けた結果である．そのため，Tsallis エントロピーの導入により，Tsallis統計力学がBoltzmann-Gibbs 統計力学の一般化として，うまく構成できるならば，Shannonの情報理論の一般化もまた存在しているはずである．このような背景のもと，Shannon の情報理論を一般化する試みは再三なされてきたが，未だ成功していない．本研究は，代表者らが築いてきた確固たる数理的基盤を基にして，Shannon の情報理論の一般化の初めての成功を目指す．

２．研究の目的

q-指数関数は，指数関数の一般化であり，その一般化の意味は，べき分布の特徴であるスケール不変性，自己相似性をもつことにある．このスケール不変性あるいは自己相似性を足掛かりに，べき分布にしたがうデータ発生の情報構造（符号化構造）を解明し，その構造を工学的に応用することが，本研究の目的である．

具体的には，情報理論における符号化定理の基礎である漸近等分割性を拡張する基礎を構築したい．漸近等分割性は，大数の法則のエントロピーによる表現である．従来の大数の法則は独立同分布を仮定しているが，その拡張と応用により，次の目標を考えていた．

(1) 通常の積の拡張(q-積) と連分数との関係の解明．

(2) (2) に基づく，大数の法則・漸近等分割性の一般化，対応する符号化定理の定式化．

(3) 連分数の近似精度による符号化定理の精密化（誤りに対する耐性と鋭敏性の解析）．

(4) Tsallis エントロピーを平均符号長の下限値にもつ符号化の構成．

３．研究の方法

3年間の研究期間のうち，1年目は代表者が所属する千葉大学のサバティカル研修において，海外の大学に滞在して，本研究に集中した．具体的には，2013 年4 月-9 月の6 か月間，アントワープ大学(ベルギー) のJan Naudts 教授の研究室に滞在し，2013 年10 月-2014 年3 月までの後半の6 か月間，トリノ工科大学(イタリア) のAntonio Scarforne 准教授の研究室に滞在し，いずれも研究協力者として本研究に参加した．2 年目以降は，それら共同研究の発展を進めた．

具体的には，スケール不変性をもつ一般化指数関数に現れる連分数の構造の詳細を調べることから始めた．q-指数関数に現れる連分

数と自己相似性の関係を明らかにする．特に，マルチスケールカントール集合などの基本的な具体例のなかで，その関係を明らかにする．その後，q-指数関数に現れる連分数の近似精度の解明，q-指数関数に現れる連分数の近似精度とε-Tsallis エントロピーとの関係の解明，q-指数関数に現れる連分数のq-積による表現などを進める予定であった．

４．研究成果

カオス，フラクタルなどの複雑系と呼ばれる分野では，べき分布が特徴的に現れる．このべき分布を指数関数の一般化としてとらえることにより，系統的に複雑系の構造が説明できることが近年わかってきた．本研究では，q-指数関数の自己相似性を用いて，連分数の近似精度に関する成果を得たが，当初得られると思っていたマルチスケールカントールの関係は未解明のままである．しかし，その研究過程で，従来の大偏差原理を特別な場合として含む，より一般的な大偏差原理の存在を示唆する重要な結果を得た．これは，q-指数関数に基づくシンプルなランダムウォークを考える上で，偶発的に見つけた．マルコフの不等式を q-指数関数により一般化し，それにより，べき分布に対する大偏差原理に関する新しい結果を得た．これは，べき分布について，従来得られていなかった大偏差の上限と下限を具体的に計算した初めての結果である．これは，iid（独立同分布）に対する確率変数の話なので，従来の大偏差原理の枠組みの結果である．その後，独立を一般化した，q-指数関数から定まる q-積を用いた大偏差に関する重要な具体例を得た．具体的には，q-指数関数から一般化二項分布を発見し，それより，α-ダイバージェンスがレート関数として初めて現れる重要な結果を得た．この結果は，当初，予想されてはいたものの，iid を仮定する大偏差原理の枠組みを超えるため難しいと考えられていた．これにより，従来の指数関数族を特別な場合として含む，べき関数族に属する数学的に堅固な数理構造（確率構造）が存在する可能性が非常に高くなった．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① J. Naudts and <u>H. Suyari</u>, Large deviation estimates involving deformed exponential functions, Physica A, 査読有, vol.436, pp.716-728, 2015.

② <u>H. Suyari</u> and A.M. Scarfone, α-divergence derived as the generalized rate function in a power-law system, Proc.ISITA2014, , 査読有, pp.130-134,2014.

③ <u>H. Suyari</u> and A.M. Scarfone, α-divergence derived as the generalized rate function in Tsallis statistics, 信学技法, 査読無, vol.114, pp.25-30 ,2014.

④<u>H. Suyari</u>, Law of multiplicative error and its generalization to the correlated observations represented by the q-product, Entropy, 査読有, vol.15, pp.4634-4647, 2013. DOI:10.3390/e15114634

⑤ T. Wada and <u>H. Suyari</u>, The κ-generalizations of Stirling approximation and multinominal coefficients, Entropy, 査読有, vol.15, pp.5144-5153,2013. DOI:10.3390/e15125144

〔学会発表〕（計５件）

①<u>須鎗弘樹</u>, Tsallis統計の基礎数理-基本的な非線形微分方程式から大偏差原理まで-, , RIMS共同研究「非線型現象のモデルに潜む未踏査数理構造の探究--基礎数理と応用の協働--」,2015年7月27日-30日, 京都大学数理解析研究所.

②<u>須鎗弘樹</u>, Tsallis 統計のレート関数として現れる α-ダイバージェンス, Mini Workshop on Information Geometry and Statistical Physics, 2014 年 10 月 18 日, 分子科学研究所.

③<u>H. Suyari</u> and A.M. Scarfone, α-divergence derived as the generalized rate function in a power-law system, ISITA2014, 2014 年 10 月 26 日-2014 年 10 月 29 日, Melbourne, Australia.

④<u>H. Suyari</u> and A.M. Scarfone, α-divergence derived as the generalized rate function in Tsallis statistics, 情報理論研究会, 2014 年 7 月 17 日 －2014 年 7 月 18 日, 神戸大学.

⑤ <u>H. Suyari</u>, Combinatorial basis for

Tsallis entropy and its applications, Complex systems – Foundations and Applications, 2013 年 10 月 29 日-2013 年 11 月 1 日, CBPF, Rio de Janeiro, Brazil.

６．研究組織

(1)研究代表者

須鎗 弘樹 (SUYARI HIROKI)

千葉大学・大学院融合科学研究科・教授

研究者番号：70246685

(2)研究分担者

無

(3)研究協力者

Jan Naudts（アントワープ大学教授）,

Antonio Scarforne（トリノ工科大学准教授）