

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 27 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610009

研究課題名(和文) CR多様体のリュマン複体と四元数CR多様体の研究

研究課題名(英文) Study of the Rumin complex of a CR manifold and the quaternionic CR manifold

研究代表者

納谷 信 (Nayatani, Shin)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70222180

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：強擬凸CR多様体のRumin複体に対するシャープなボホナー・ワイツェンベック型公式について研究を行い、1形式の場合にRuminの書き下した公式が実際にシャープであることを確認するとともに、応用として劣ラプラシアン固有値のシャープな評価の極めて簡明な別証明を得た。また、2形式の場合にシャープな公式を書き下すことを試み、一つの実パラメータを含む形で決定することができた。

四元数CR多様体上のツイスター空間に(可積分)CR構造を定めることを目標として研究を行い、ツイスター空間上に概CR構造が定義できて部分可積分になることまでを証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied sharp Bochner-Weitzenböck formulas for the Rumin complex of a strongly pseudoconvex CR manifold. For 1-forms we verified that the formula formerly written down by Rumin was actually sharp, and as an application we obtained a quite simple new proof of the sharp estimate of the first nonzero eigenvalue of the sublaplacian. Also, for 2-forms we tried to write down a sharp formula and determined it up to a single real parameter.

We studied the twistor space of a quaternionic CR manifold in order to define an (integrable) CR structure on it, and proved that one could define an almost CR structure on the twistor space and it was partially integrable.

研究分野：微分幾何学

キーワード：強擬凸CR多様体 Rumin複体 ボホナー・ワイツェンベック型公式 四元数CR多様体 ツイスター空間

## 1. 研究開始当初の背景

(強擬凸)CR 構造は複素多様体の(強擬凸)実超曲面をモデルとする幾何構造である。強擬凸 CR 構造を備えた多様体---強擬凸 CR 多様体---は接触多様体であり、接触形式を固定するとレヴィ計量とよばれるカルノー・カラテオドリ計量が定まる。

Rumin(1993)は、接触多様体に対して「接触ド・ラム複体」とよぶべき微分複体を定義した。そして、強擬凸 CR 多様体にレヴィ計量を固定した状況において、調和形式の理論を確立するとともに、リーマン幾何におけるポホナー・ワイツェンベックの公式の類似を書き下し、コホモロジー群に対する消滅定理を定式化した。しかし、残念ながら Rumin の公式はシャープではないため、彼の消滅定理を幾何学的剛性問題のような繊細な問題に応用することはできない。また、多様体の次元を  $2n+1$  とするとき、 $n$  次および  $n+1$  次においては、ポホナー・ワイツェンベック型公式自体が未知である。

CR構造の四元数的類似については、様々な構造が定式化されてきたが、その中では、四元数接触構造(Biquard, 2000)が最も一般性を持ち、幅広く研究されていた。しかしながら、この構造ですらかなりの剛性を持ち、例えば四元数アフィン空間内の一般的な実放物超曲面上にはそのような構造は自然には存在し得ないことが分かっている。一方、研究代表者と連携研究者・鎌田博行は、四元数CR構造を定式化し、その幾何学的研究の基礎付けを行った。この構造は、任意の四元数多様体の任意の実超曲面上に自然な仕方で定めることができる。そのような性質をもつ四元数類似は、我々の構造が初めてのものであり、この条件をみたさない四元数接触構造(および先行するすべての四元数的類似)の弱点を補っている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、CR 幾何に関わる二つのテーマについて研究し、将来の展開に向けての基礎を確立することである。以下、二つのテーマのそれぞれについて、研究目的と内容を述べる。

### (1) 強擬凸 CR 多様体の Rumin 複体の研究

強擬凸CR多様体のRumin複体に対して、すべての次数においてシャープなポホナー・ワイツェンベック型公式を書き下すことを目標とする。これにより、種々の問題に応用可能なコホモロジー消滅定理が得られるはずである。とくに、申請者は1999年に出版した論文 *Discrete groups of complex hyperbolic isometries and pseudo-Hermitian structures*, Trends in Mathematics (Birkhauser), 1999, 209--237

において、複素クライン群(リー群 $SU(n,1)$ の離散部分群)に関するある剛性問題への応用の可能性を示唆したが、リュマンのコホモロジー消滅定理をそのまま適用することでは

解決できなかった。本研究は、ポホナー・ワイツェンベック型公式そのものをシャープなものに改良することで、上記の問題を始めとして、応用への突破口を開こうとするものである。

リュマン複体は、通常のド・ラム複体と異なり、多様体の次元が $2n+1$ の場合、 $n$ 次コチェインを $n+1$ 次元コチェインに写す外微分作用素は2階の作用素になるという特徴を持つ。このことに対応してラブラシアンは4階の作用素となるが、このラブラシアンに対応するポホナー・ワイツェンベック型公式は未だ書き下されていない。本研究は、まずもって、他の次元において存在しているポホナー・ワイツェンベック型公式を改善することを目標とするが、さらに進んで、この中間次元におけるポホナー・ワイツェンベック型公式を書き下すことも視野において研究を進める。

### (2) 四元数 CR 多様体の研究

強擬凸四元数CR多様体のツイスター空間を定式化して、その上に自然にCR構造が定まることを証明する。強擬凸な四元数CR多様体に対して、そのツイスター空間がCR多様体として確かに存在することを実証できるか否かは、我々の構造(とくに可積分性の定義)の適切性の大きな試金石といえる。

さらに、強擬凸四元数 CR 多様体に対して、それを境界とする四元数多様体の存在問題の解決を目指す。Biquard によって、四元数接触構造を無限遠境界とする四元数ケーラー構造の局所的構成という興味深い結果が得られている。我々の四元数 CR 構造の場合にも、四元数構造と何かしらの特殊性をもつエルミート計量の対を構成することは可能であると期待される。この問題の解決は、CR 多様体に対する倉西埋め込み定理の四元数的類似を確立することに相当する。

### 3. 研究の方法

3年間の研究を通じて、Rumin 複体に対するシャープなポホナー・ワイツェンベック型公式を証明し、それに基づくコホモロジー消滅定理を定式化する。まず、すでに解明されている1次の場合について単純な2次の場合にリュマン複体に対するシャープなポホナー・ワイツェンベック型公式を証明し、それに基づくコホモロジー消滅定理を定式化する。そして、この作業をひな形にして、すべての次数においてリュマン複体に対するシャープなポホナー・ワイツェンベック型公式を証明し、それに基づくコホモロジー消滅定理を定式化する。中間次元におけるポホナー・ワイツェンベック型公式についても考察する。

強擬凸四元数 CR 多様体のツイスター空間がCR多様体として存在することを実証する。この目的のためには、強擬凸四元数 CR 多様体の曲率不変量(リーマン多様体のワイル曲率、強擬凸 CR 多様体のチャー・モーザー曲率に相当するもの)を特定し、その部分的消滅を確認するとともに、それがツイスター空間

間の CR 構造の可積分性を導くという、長大な計算を実行する必要がある。また、可積分性の定義の再考を迫られる可能性もあり、その場合には、四元数 CR 構造のモデルである四元数多様体の実超曲面の構造を再検討し、より適切な可積分条件の定式化を見出すことに努める。

研究代表者と連携研究者が定期的に討論を行うことによって研究を進行させることを基本とし、他大学の専門家の訪問・招聘、国内外での研究集会への参加、書籍の講読によって、知識・情報を入手し、新たな着想に役立てる。

#### 4. 研究成果

強擬凸 CR 多様体の Rumin 複体に対するシャープなボホナー・ワイツェンベック型公式を書き下すことを目標に研究を行った。1 形式の場合に、Rumin の書き下した公式が実際にシャープであることを確認し、このことの応用として、劣ラプリアンの固有値のシャープな評価(Greenleaf, 1985)の極めて簡明な別証明を得た。等号成立の場合も考察した。また、この研究の過程で、CR Paneitz 作用素とよばれる 4 階の線形偏微分作用素を Rumin 複体に現れる境界・余境界作用素という 1 階の作用素の合成として表示することができた。

Rumin は 2 次以上の微分形式に対してもボホナー・ワイツェンベック型公式を書き下しているが、それらはシャープでないことが分かっている。(正確に述べると、我々が念頭においている剛性問題への応用に耐えるほどシャープでない。) 2 形式の場合にシャープな公式を書き下すことを試み、一つの実パラメータを含む形で決定することができた。ただし、いずれかのパラメータに対して公式が実際にシャープになるかは未解明である。現在、強擬凸 CR 多様体の Rumin 複体に対する調和微分形式やボホナー・ワイツェンベック型公式について本研究期間に得られた成果を論文にまとめる作業に取り組んでいる。

四元数 CR 多様体上のツイスター空間に(可積分)CR 構造を定めることを目標として研究を行った。2 年目までに、ツイスター空間上に概 CR 構造が定義できて部分可積分になることまでが証明できた。(なお、概 CR 構造が定義できることの証明は、2014 年 9 月にブルガリアで開催された微分幾何学研究集会の報告集に発表済みであり、部分可積分であることも補遺の形でアナウンスしてある。) 最終年度は、この概 CR 構造が真に可積分になることを証明することを目指して研究に取り組んだ。ツイスター空間の接空間は水平方向と垂直方向に分解し、水平方向は基底にある四元数 CR 多様体の接空間の余次元 3 四元数部分空間と補空間への分解に対応してさらに分解する。したがって、ツイスター空間の余次元 1 複素部分束の二つの切断に対してナイエンハイス表示の消滅を示すには、全部で六つの場合を扱う必要がある。

我々はこのうち五つの場合についてナイエンハイス表示の消滅を確認することができた。その際、2 年目の研究において見直した四元数 CR 構造の可積分性の定義をさらに補充する必要があった。今後、可積分性の定義をさらに検討することにより、残された一つの場合にナイエンハイス表示の消滅を確認し、CR 構造の可積分性の証明を完結させる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

##### 1. 納谷信、鎌田博之

Quaternionic CR geometry

Hokkaido Mathematical Journal 42 (2013), 159--207.

査読あり

[学会発表](計 19 件)

##### 1. 納谷信

Rumin 複体に対するシャープなボホナー公式を目指して

福岡大学微分幾何研究会

2013 年 11 月 1 日--4 日

福岡大学セミナーハウス

##### 2. 鎌田博行

Compact complex surfaces with geometric structures related to split quaternions:

recent results by

Davidov-Grantcharov-Mushkarov-Yotov

福島幾何学研究会

2013 年 12 月 8 日

福島大学

##### 3. 納谷信

Rumin-Bochner formula for 1-forms on a CR manifold

第 2 回日本スペイン幾何学研究集会

2014 年 2 月 5 日--10 日

東京工業大学

##### 4. 鎌田博行

Quaternionic CR structure

Progress of geometric structures on manifolds

名城大学幾何学研究集会

2014 年 3 月 6 日

名城大学

##### 5. 納谷信

Mendel-Naor, "Expanders with respect to

Hadamard spaces and random graphs"の第3節の解説  
勉強会: 非線形スペクトルギャップとエキスパンダー  
2014年3月9日--12日  
サンヒルズ三河湾  
6. 鎌田博行  
Geometric structure modeled on a real hypersurface in a quaternionic manifold  
ICDG2014, Fourth International Colloquium on Differential Geometry and Its Related Fields  
2014年9月9日  
ヴェリコタルノヴォ, ブルガリア  
7. 納谷信  
CR 多様体上の1形式に対するRumin-Bochner公式  
日本数学会秋季総合分科会  
2014年9月24日--9月27日  
広島大学  
8. 納谷信  
CR 多様体上の1形式に対するRumin-Bochner公式  
福岡大学微分幾何研究会  
2014年10月31日--11月3日  
福岡大学セミナーハウス  
9. 納谷信  
Superrigidity via discrete harmonic maps and nonlinear spectral gaps I, II  
低次元多様体モジュライ空間の幾何学  
2014年12月8日--11日  
京都大学数理解析研究所  
10. 鎌田博行  
コンパクト複素曲面上の自己双対ニュートラル計量について  
数学物理 合同特別セミナー  
2015年2月21日  
大阪市立大学  
11. 鎌田博行  
四元数CR多様体のツイスター空間について  
(Twistor space for a quaternionic CR manifold),  
第22回沼津研究会  
2015年3月10日  
沼津工業高等専門学校  
12. 納谷信  
Fixed-point property for uniformly Lipschitz affine actions on a Hilbert space  
研究集会「離散群と双曲空間の幾何と解析」  
2015年6月

京都大学数理解析研究所  
13. 鎌田博行  
Quaternionic CR structure: a geometric structure modeled on a real hypersurface in a quaternionic manifold  
Workshop on almost Hermitian and contact geometry,  
2015年10月22日  
ベンドレボ, ポーランド  
14. 納谷信  
Fixed-point property for affine actions on a Hilbert space  
福岡大学微分幾何研究会  
2015年11月  
福岡大学セミナーハウス  
15. 鎌田博行  
四元数 CR 構造の強積分可能性とツイスター空間について  
福岡大学微分幾何研究会  
2015年11月2日  
福岡大学セミナーハウス  
16. 納谷信  
Fixed-point property for uniformly Lipschitz affine actions on a Hilbert space  
Workshop "Geometric Analysis in Geometry and Topology 2015"  
2015年11月  
東京理科大学森戸記念館  
17. 納谷信  
ヒルベルト空間への一様リプシッツアフィン作用の剛性  
研究集会「多様体上の微分方程式」  
2015年11月  
金沢大学サテライトプラザ  
18. 鎌田博行  
四元数CR多様体に対する概CRツイスター空間の積分可能性について  
(Integrability of the almost CR twistor space of a quaternionic CR manifold)  
第23回沼津研究会  
2016年3月8日  
沼津工業高等専門学校  
19. 納谷信  
ヒルベルト空間へのアフィン作用に対する固定点性質  
2016年度日本数学会年会  
2016年3月  
筑波大学

〔図書〕(計1件)

1. 納谷信、鎌田博之

Almost CR structure on the twistor space  
of a quaternionic CR manifold

Proceedings of the 4th International  
Colloquium on Differential Geometry and  
its Related Fields, Veliko Tarnovo,  
Bulgaria, 2014, ``Current Developments in  
Differential geometry and its Related  
Fields''

93--114 (2016)

6. 研究組織

(1)研究代表者

納谷 信 (NAYATANI SHIN)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
教授

研究者番号：70222180

(2)連携研究者

鎌田博行 (KAMADA HIROYUKI)

宮城教育大学・教育学部・教授

研究者