

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2016

課題番号：25610010

研究課題名(和文) 指標多様体の組み合わせ的モデルとその群作用のダイナミクス

研究課題名(英文) Combinatorial models of character varieties and the dynamics of group actions there

研究代表者

大鹿 健一(OHSHIKA, Ken'ichi)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：70183225

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：自由群の指標多様体の研究において以下のような顕著な成果を挙げた。まずSchottky空間の位相構造を理解する重要な鍵となる収束定理を完成させた。またSchottky空間の境界とprimitive stable表現の空間の交わりを完全に決定し、それらの点が全て閉多様体の表現の集積点となっていることを示した。一般のKlein群について、Sullivanの剛性定理をCannon-Thurston写像との関連でより深く理解することに成功した。さらにCannon-Thurston写像の非単射点とconical limit pointsの関係を詳しく調べることができた。以上の全ての結果を専門誌に出版した。

研究成果の概要(英文)：We have obtained the following results concerning character varieties of free groups. We have accomplished the proof of the general convergence theorem for Schottky spaces, which plays a key role for understanding the topology of Schottky spaces. We have also determined the intersection of the boundaries of Schottky spaces and the space of primitive stable representations, and showed that every point there is an accumulation point of representations corresponding to closed 3-manifolds. For general Kleinian groups, we have succeeded in giving a new way of understanding Sullivan's rigidity theorem in terms of Cannon-Thurston maps. Furthermore, we have studied the relationship between non-injective points of Cannon-Thurston maps and conical limit points for general Gromov hyperbolic groups acting as convergence groups. We have published all of these results in academic journals.

研究分野：位相幾何学

キーワード：指標多様体 Klein群 力学系 Cannon-Thurston写像

## 1. 研究開始当初の背景

1980年代にThurstonによって始められた Klein 群の位相幾何学、双曲幾何を用いた研究は、21世紀にかけて大きな成果を上げてきた。その中で特に、Klein 群の変形空間の位相構造を調べることが、大きな課題となった。この研究には、Minsky 達によって曲線複体の測地線の hierarchy 構造を用いて開発された、3次元双曲多様体の組み合わせ的モデルの理論が大きな役割を果たしている。変形空間はその内部が擬等長変形空間と呼ばれる、函数論的な研究によりその構造がよく分かっている空間に一致することが知られており (Bers-Sullivan-Thurston 稠密性予想)、この部分空間の極限として、変形空間を理解しようという研究が続けられてきた。

2010年代になり、変形空間を、指標空間と呼ばれるアフィン代数多様体の部分空間として捉えるという考え方が、Lobotzky や Minsky の仕事を通じて、有効性を発揮するようになった。指標多様体の変形空間を含む近傍全体の構造を究明できれば、変形空間の位相構造のみならず、同じ指標多様体に含まれる相異なる変形空間同士のつながりなど、様々なことが解明できることが期待できる。このためには、組み合わせモデルの理論を指標多様体全体で構成することが決定的に役立つと考えられるようになった。

## 2. 研究の目的

研究対象を変形空間の外部にまで広げることにより、指標多様体の研究は、理論的に大きな飛躍がもたらされると期待される。より具体的には以下のような研究を進める。

変形空間外にある指標多様体の点は、一般には忠実離散表現でないので、対応する商多様体を持たない。この状況下でどのような組み合わせ的モデルを構成するのが適当であるかを探り、相応しいモデルを構成するのが最初にすべきことである。閉曲面群の場合のモデルは双曲空間の測地線の配置空間を利用して、自由群の場合のモデルは outer space についての Sabalka-Subchuk の複体の構成方法を一般化することによって、構成することを目指す。モデルが構成できたら、その上の写像類群  $\text{Mod}(S)$ 、外部自己同型群  $\text{Out}(F_n)$  の作用を調べる。これらの群はモデルの組み合わせ構造を保つように働いているはずである。そこでモデル全体の作る集合にそれらの組み合わせ構造から来る、位相なり距離なりを入れた上で、その集合内で、離散集合で群作用に関して不変で全体と擬等長にななものを出し、さらにそこに単体的複体の構造を入れることを考え、群作用をこの指標多様体を近似する複体上の同型写像としてとらえる。これはちょうど Teichmüller 空間への作用を曲線複体への作用でとらえること

に類似していると期待される。このような離散作用が構成できれば、離散力学系の理論を用いて、群作用の解析を行うことができる。

指標多様体は Klein 群の変形空間、双曲錐多様体の変形空間双方を含み、さらにその無限遠点は  $\infty$ -樹への群作用誘導することが知られており、Klein 群、3次元多様体の研究において大変重要な対象である。本研究ではまず2つの重要な場合、曲面群と自由群について、指標多様体の構造を本格的に研究する。これまで指標多様体自体の研究はほとんど未発達な状態であり、指標多様体とその上の写像類群、外部自己同型群の作用がモデルを通じて理解できれば、この分野への寄与は大変大きい。変形空間の境界の点の閉多様体表現による近似の様子、錐多様体の道で2つの変形空間を結ぶものの構成、3次元双曲多様体の Heegaard 分解の指標多様体における分布などが解明されることが大いに期待できる。

## 3. 研究の方法

指標多様体は Klein 群、3次元多様体の研究において、大変重要な対象であるのにもかかわらず、これまでの研究方法では、その次元や無限遠点などの外部的な情報が得られているに過ぎなかった。その内部構造、すなわち指標多様体における、Klein 群の変形空間達の配置、錐多様体変形や、Dehn 手術空間などの配置など、指標多様体の研究を Klein 群や3次元多様体に応用するのに必要である情報について調べていくのが我々の研究方針である。その際、強力な武器となるのが、組み合わせ的モデルである。

Minsky 達のモデル多様体の構成は Klein 群とその変形空間の理論の進歩に大きく貢献した。その一般化であるこの組み合わせ的モデルが構成できれば、指標多様体の構造解明に大きく役立つはずである。指標多様体の忠実離散でない部分については、Klein 群の ending lamination theorem に対応するものは、まだ定式化さえされていない。指標多様体の一般の点に対して、end invariant を定義することを可能にすることは大切な問題であり、これにより、指標が一意的に決まるといふ、ending lamination theorem の一般化に当たるものを予想として定式化できることが次の重要な問題である。このタイプの予想が数学的にきちっと定式化されれば、予想の解決が、指標多様体の今後の研究の大きな目標となると期待される。さらに組み合わせモデルと群作用の離散モデルを用いて Klein 群の変形空間と3次元閉多様体、錐多様体の理論を統合することを目指す。

## 4. 研究成果

指標多様体における、変形空間については、まず Woojin Jeon, InKang Kim, Cyril Lecuire との共同研究において、自由群の指

標多様体について，変形空間で primitive stable な表現となる点を完全に決定することができた．これは Minsky の問題の解決となっている．さらに，変形空間の教会の点は全てが，閉多様体の基本群への表現となる点の列の集積点となることを Inkang Kim, Cyril Lecuire との共同研究で示した．この結果により，閉双曲多様体と Schottky 群を繋ぐ道の存在が予想されることになり，もともと考えていた問題である，錐多様体の作る連続変形と Schottky 空間を関連づける問題の端緒が得られたことになる．

Schottky 空間の幾何的構造自体についても研究を進めることができた．Inkang Kim, Cyril Lecuire との共同研究において，Thurston の 2 重極限定理の Schottky 空間における対応物を証明した．これは Thurston の問題 list の 1 つの完全な解決となっている．

さらに Cannon-Thurston 写像を通して，極限集合の力学系を理解する試みを行った．Woojin Jeon との共同研究では，極限集合の群作用のエルゴード性についての基本的な結果である，Sullivan の剛性定理の Cannon-Thurston 写像を通じた再解釈を行った．2 つの群として同型な Klein 群の間には，Cannon-Thurston 写像の特異点以外では，Möbius 写像になるような conjugacy が存在する．さらに特異点は Patterson-Sullivan 測度が 0 になる．

また Woojin Jeon, Ilya Kapovich, Christopher Leninger との共同研究において Gromov hyperbolic 群が convergence group として作用しているという，一般的な状況で，Cannon-Thurston 写像の非単射点と，conical limit point の関係を調べた．これらは一致をするようなのが予想であったが，一致しないような例を組織的に作ることに成功した．

さらに作間誠との共同研究において，自由群の変形空間の指標多様体内での研究を 3 次元多様体論に応用することに成功した．具体的には，Heegaard 分解の Hempel distance が大きい時に，Heegaard 曲面の写像類群の部分群で，Handlebodies の恒等写像に homotopic な写像類に写されるもので生成されるものは，自由積分解されることを示した．

以上のような研究により，指標多様体上の群作用の理解を大きく進めることができた．

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

1. Ken'ichi Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmüller spaces, Ann. Inst. Fourier, 64 (2014), 145-176,
2. Woojin Jeon, Inkang Kim, Ken'ichi

- Ohshika and Cyril Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, Israel J. Math. 199 (2014), no. 2, 841-866,
3. Inkang Kim, Cyril Lecuire, and Ken'ichi Ohshika, Primitive stable closed hyperbolic 3-manifolds. Topology Appl. 172 (2014), 68-71
4. Ken'ichi Ohshika, Compactifications of Teichmüller spaces, Handbook of Teichmüller theory vol. IV, IRMA, EMS, 235-254
5. Hideki Miyachi, Ken'ichi Ohshika and Sumio Yamada, Weil-Petersson Funk metric on Teichmüller space, Handbook of Hilbert geometry, (2014), EMS, 339-352,
6. Ken'ichi Ohshika, Geometric limits of Kleinian groups and their applications, Handbook of Group Actions, International Press vol 2, (2015) 245-270
7. Liuan Li, Ken'ichi Ohshika and Xiantao Wang) On Klein-Maskit Combination Theorem in space II, Kodai J. Math. 38 (2015), 1-22
8. Woojin Jeon and Ken'ichi Ohshika, Measurable Rigidity for Kleinian groups, Ergod. Th. Dyn. Sys., 36 (2016), 2498-2511
9. Ken'ichi Ohshika and Makoto Sakuma, Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions, Geometriae Dedicata 180 (2016), 117-134
10. Inkang Kim, Cyril Lecuire and Ken'ichi Ohshika, Convergence of freely decomposable Kleinian groups, Inventiones Mathematicae, 204, 83-131 (2016)
11. Vincent Alberge, Hideki Miyachi, and Ken'ichi Ohshika, Null-set compactifications of Teichmüller spaces, Handbook of Teichmüller theory vol. VI 71-94 (2015)
12. Woojin Jeon, Ilya Kapovich, Christopher Leninger and Ken'ichi Ohshika, Conical limit points and the Cannon-Thurston map, Conformal Geometry and Dynamics, 20 (2016), 58-80,
13. Eiko Kin, Sadayoshi Kojima and Mitsuhiro Takasawa, Minimal dilatations of pseudo-Anosovs generated by the magic 3-manifold and their asymptotic behavior. Algebr. Geom. Topol. 13 (2013), no. 6, 3537-3602
14. Eiko Kin, Dynamics of the monodromies of the fibrations on the magic 3-manifold. New York J. Math. 21 (2015), 547-599
15. Eiko Kin, and Mitsuhiro Takasawa, The boundary of a fibered face of the magic 3-manifold and the asymptotic behavior of

minimal pseudo-Anosov dilatations.  
Hiroshima Math. J. 46 (2016), no. 3,  
271–287

〔学会発表〕(計 17 件)

1. Ken'ichi Ohshika, Geometric completion for quasi-Fuchsian spaces, AMC 2013 Pusan, 2013.7.4
2. Ken'ichi Ohshika, Geometric limits and deformation spaces of Kleinian groups, KAIST GT Fair, Jeonju, Korea, 2013.8.15
3. Ken'ichi Ohshika, Geometric completion for deformation spaces of Kleinian groups, Japanese Turkish Joint Geometry Meeting, Galatasaray University, Istanbul 2013.11.23
4. Ken'ichi Ohshika, Subgroups of mapping class groups associated to Heegaard splittings and their actions on projective lamination spaces, New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, MFO Oberwolfach, 2014.2.10
5. Ken'ichi Ohshika, The work of Thurston on Kleinian groups, (4 talks) 2014.5.14-25 Master Class : Around Thurston-Grothendieck-Teichmüller theories, IRMA, Strasbourg
6. 大鹿健一, Klein 群の幾何とその応用, 日本数学会総合講演 広島大学, 2014.9.26
7. Ken'ichi Ohshika, Hyperbolic 3-manifolds and the Schottky space viewed as lying in the character variety, Group Action Forum, Tsinghua-Sanya Mathematical Forum, Sanya, China 2014. 12. 16
8. Ken'ichi Ohshika, Geography of closed 3-manifolds within character varieties, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups, Université de Strasbourg, 2015.6.5
9. The origin of the notion of manifold, Conference "Geometry in History" Université de Strasbourg, 2015.6.11
10. Ken'ichi Ohshika, Accumulation of closed 3-manifolds within character varieties. Geometric Topology Fair in Korea, A workshop on geometric group theory low-dimensional topology, 2015. 8.10, Gyeongju, K-Hotel
11. Ken'ichi Ohshika, Various compactifications of Teichmüller spaces and their relations (3 talks), Geometric structures and related topics, , 2015. 8.25-26, KIAS, YangYang
12. Ken'ichi Ohshika, Teichmüller space: its asymptotic geometry, compactifications, and combinatorial models, ( 3 talks ), Finsler geometry and applications to low-dimensional geometry and topology

and moduli spaces, University of Cagliari, Italy, 2015. 9.21-23

13. Ken'ichi Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups, Topology and Groups, (2 talks) University of Goa, 2015. 10.17-18
  14. 3-manifolds fibring over the circle: from Poincaré's Analysis Situs to today, Autour de Poincaré}, 86ème rencontre entre les mathématiciens et les physiciens théoriques, IRMA Université de Strasbourg, le 4 juin 2016
  15. Ken'ichi Ohshika, Reduction of boundaries of Teichmüller spaces, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China , 2016.7.25
  16. Ken'ichi Ohshika, Geometric realisation for degenerations of hyperbolic structures, Workshop on Moduli Spaces of Geometric Structures, IMS, National University of Singapore, Singapore, 2016.8.16
  17. Ken'ichi Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups and what are continuous and discontinuous there, Moduli spaces and applications in geometry, topology, analysis and mathematical physics, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing, China, 2017,2.27
- 〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等  
なし

6 . 研究組織

(1)研究代表者

大鹿健一 (Ken ' ichi Ohshika)

大阪大学大学院理学研究科教授

研究者番号 : 70183225

(2)研究分担者

角大輝 (Hiroki Sumi)

京都大学大学院人間・環境学研究科教授

研究者番号 : 40313324

金英子 (Eiko Kin)

大阪大学大学院理学研究科准教授

研究者番号 : 80378554

(3)連携研究者

( )

研究者番号 :

(4)研究協力者

( )