

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 4 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610011

研究課題名(和文)一般化された幾何構造と4次元微分トポロジー、導来圏の研究

研究課題名(英文) Research on generalized geometric structures, 4 dimensional differential topology and derived category

研究代表者

後藤 竜司 (Goto, Ryushi)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30252571

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は主に次の二点である。(1) 複素曲面上のポアソン構造から定まる一般化された複素構造の非障害的な変形およびモジュライ空間の構成を行った。さらにモジュライ空間上に「Stratified flat structures」が入ることを示した。(2) 複素構造もシンプレクティック構造も入らない4次元多様体上に、多重度 m の対数変換を用いて、新しい一般化された複素構造を構成した。その一般化された複素構造のジャンピングローカスの連結成分の個数をいくらかでも大きくすることが可能であることを示した。(1)、(2)の結果は論文[1]、[2]にまとめ、出版予定となっている。

研究成果の概要(英文)：The author's results are mainly as follows. (1) We show that generalized complex structures on a complex surface induced from a holomorphic Poisson structure admit unobstructed deformations, i.e., the Kuranishi spaces are smooth. We construct moduli spaces of generalized complex structures induced from Poisson structures on del Pezzo surfaces. Further it turns out that the moduli space admits "Stratified flat structure", that is, the moduli space has a stratification which is constructed from the types of singularities of jumping locus and each strata admits a flat structure, i.e., a torsion free flat connection of the tangent bundle. (2) We obtain a new family of generalized complex structures with k connected components of jumping loci for any k on certain 4-manifolds which have neither complex structures and symplectic structures, by using logarithmic transformation of multiplicity m . These two results are already written in our paper [1], [2] and they are accepted for publication.

研究分野：複素幾何、微分幾何

キーワード：一般化された複素構造 一般化されたケーラー構造 ポアソン構造 変形理論 モジュライ空間 flat structure

1. 研究開始当初の背景

2002年に Nigel Hitchin により、一般化された複素構造という新しい多様体上の幾何構造が導入された。Hitchin, Nigel Generalized Calabi-Yau manifolds. Q. J. Math. 54 (2003), no. 3, 281–308

これは通常の複素構造とシンプレクティック構造を特別な場合として含む幾何構造であり、エルミート幾何、ポアソン幾何、非可換代数幾何、4次元の微分トポロジーそして数理物理など様々な分野と関連しており、この分野の研究が現在に至るまで盛んに行われている。

Gualtieri, Marco Generalized complex geometry. Ann. of Math. (2) 174 (2011), no. 1, 75–123.

Goto, Ryushi Deformations of generalized complex and generalized Kähler structures. J. Differential Geom. 84 (2010), no. 3, 525–560.

この一般化された複素構造にはタイプ数という多様体の各点ごとに決まる不変量があり、特に実4次元多様体の場合、タイプ数が0ならば、シンプレクティック構造から定まる一般化された幾何構造であり、タイプ数が2ならば、複素構造から定まる一般化された複素構造となっている。興味深い点は一般化された複素多様体上でタイプ数が変化する現象が見られることである(ジャンピング現象という)。典型的な例として、複素2次元射影空間上には通常の複素構造とは違う一般化された複素構造 J があり、複素2次元射影空間の3次曲線 C 上ではタイプ数が2であり、 C の補集合の上ではタイプ数が0となっているものが構成されている。つまり、この J は3次曲線 C 上で複素構造から、 C の補集合上でシンプレクティック構造から来ている幾何構造であり、二つの幾何構造の「ハイブリッド」となっており、大変興味深いものである。

この一般化された複素構造の変形は3次曲線 C が非特異の場合は楕円曲線の変形により与えられることになり、その変形理論およびモジュライ空間の理論はとても興味深いものになると考えられることから研究を進めた。また、このような一般化された複素曲面の理論は非可換代数幾何と密接な関係があることが示されている。複素多様体上には接続層の複体から構成される導来圏があり、この導来圏の非可換な変形が非可換代数多様体の変形とされている。特に2次元の射影空間の場合は楕円曲線と密接に関連しており、スクリーニン代数が非可換な代数として幾何学的に構成され、盛んに研究されている。

(Artin, M.; Tate, J.; Van den Bergh, M. Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 33–85,

Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990などを参照)

複素多様体の一般化された複素多様体としての変形の無限小変形空間と非可換代数多様体としての変形の無限小変形空間は共にホッホシルドコホモロジー群で与えられ不思議なことに一致している。また射影空間の場合には共に楕円曲線が本質的であることなど、多くの共通点が見られる。そのため、非可換代数多様体の理論と一般化された複素多様体の理論との関係を解明することも研究上の目標としている。

実4次元多様体で複素構造もシンプレクティック構造も入らないものとして、奇数個の2次元複素射影空間と m 個の向きを変えた2次元複素射影空間の連結和が知られているが、Cavalcanti-Gualtieri により、このような空間には一般化された複素構造が構成された。

この結果は一般化された複素多様体のカテゴリが複素多様体とシンプレクティック多様体のカテゴリを真に含むことを示している。この後、様々な4次元の一般化された複素多様体が構成されたが、不思議なことに、概複素構造を持ち、一般化された複素構造を持たない4次元多様体の例は構成されていなかった。そこで、筆者は

「4次元概複素多様体上には一般化された複素構造が存在するか?」という問題をとりあげ、研究を進めた。

2. 研究の目的

(1) 複素多様体上正則なポアソン構造により定まる一般化された複素構造の変形理論を確立し、そのモジュライ空間の構成を行う。さらに通常の複素多様体の変形理論やモジュライ空間とは大きく異なりことが予想されるので、その違いを明確にする。また、現在、代数幾何の分野で盛んに研究されている非可換代数幾何との対応を明確にし、一般化された複素多様体のモジュライと非可換代数多様体のモジュライ空間との対応を確立する。

(2) 「4次元概複素多様体上に一般化された複素構造は存在するか?」という問題を解決することを目指した。

3. 研究の方法

(1) 複素2次元の射影空間の場合に一般化された複素構造の変形およびモジュライ空間の構成を行い、さらに del Pezzo 曲面などの場合に研究を進める。また、複素3次元射影空間の場合は、複素特異葉層構造の分類が知られており、この分類から複素3次元射影空間のポアソン構造のモジュライ空間には6個の成分があることが知られており、複素3次元射影空間は非常に豊かな幾何構造

をもっていることが予想される。このような具体例を調べ、変形やモジュライの幾何学的な不変式論を使った構成などを行った。

4. 研究成果

研究成果は主に次の二点である。

(1) 複素曲面上のポアソン構造から定まる一般化された複素構造の変形理論を確立した。ポアソン構造の零点集合が非特異な楕円曲線となっている場合は、この変形の障害は消えており、さらに倉西空間は楕円曲線の補集合の第二コホモロジー群で与えられることを示した、さらにポアソン構造の零点集合が孤立特異点を持つ場合には、各孤立特異点のヤコビ環と補集合の第二コホモロジー群からなる短完全列が構成され、倉西空間を完全に記述することが出来る。つまり、補集合の第二コホモロジー群は特異点の型を保った変形を与えており、ヤコビ環は特異点をスムージングする変形となっている。

複素曲面上のポアソン構造から定める一般化された複素構造のモジュライ空間の構成を行った。複素 2 次元射影空間やいくつかの Del Pezzo 曲面の場合に具体的にモジュライ空間の構成を行った。さらに複素曲面上のポアソン構造から定める一般化された複素構造のモジュライ空間上にポアソン構造の零点集合の特異点の型に応じて、stratification を構成することが出来る事を示した。次元の一番大きい open strata は零点集合が非特異な楕円曲線となっている。ポアソン構造に対応しており、node, cusp などの特異点の種類と数に応じて、strata が定める。各 strata の次元は零点集合の補集合の複素第二コホモロジー群で与えられており、整数係数の第二コホモロジー群を使えば、strata には自然な Flat structure (平坦構造)が入っていることが示される。ここで平坦構造というのは接束にトーシヨフリーの平坦な接続がはいることを同値である。このような各 strata に平坦な構造が入るような stratification を「Stratified flat structures」と呼ぶことにする。(stratified flat structure を持つ多様体の典型例はトーリック多様体などである。) Stratified flat structures は open strata 上に微分方程式を定め、divisor に沿って、そのモノドロミー群を計算することが重要である。2次元複素射影空間の場合には計算を行った。

Stratified flat structures を持つ多様体はかなり限定されたものであると予想されるため、モジュライ空間上の Stratified flat structures の存在はモジュライ空間をかなり決定してしまうものと思われる。

(2) 複素構造もシンプレクティック構造も入らない 4 次元多様体上に多重度 m の対数変換を用いて、新しい一般化された複素構造を構成した。その一般化された複素構造

のジャンピングローカスの連結成分の個数をいくらかでも大きくすることが可能であることを示した。

(1), (2) の結果は論文[1], [2] にまとめ、出版予定となっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

[1] Ryushi Goto and Kenta Hayano, " C^∞ logarithmic transformations and generalized complex structures"

To appear The Journal of Symplectic Geometry, 査読有

[2] R. Goto, Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by C^∞ logarithmic symplectic structures and logarithmic Poisson structures,

Proceedings of China-Japan Geometry

Conference: Geometry and Topology of

Manifold ---The 10th Geometry Conference

for the Friendship of China and Japan 2014,

to appear, 査読有

[3] R. Goto, On the stability of locally conformal Kähler structures. J. Math. Soc. Japan 66 (2014), no. 4, 1375–1401.

[学会発表](計 8 件)

1. R. Goto, 一般化された複素多様体と変形理論, 東京工業大学 集中講義, 2015, 6/29-7/3

2. R. Goto, 対数的ポアソン構造と一般化された複素多様体の非障害的な変形について, 東京工業大学数学専攻 大岡山談話会 2015, 7/7

3. R. Goto, Stratified flat structures on moduli spaces of generalized complex surfaces, The 21st Symposium on Complex Geometry (Kanazawa) 2015, 10/30

4. R. Goto, 一般化された複素多様体の変形とモジュライ空間

東京大学数理科学研究科集中講義

5. R. Goto, Deformations of generalized complex manifolds 2014. 12.1-12.5 4, The 10th Geometry Conference for the Friendship between China and Japan, which will be held at Fudan University, Shanghai, China from September 6 to 12 2014 Sept 8,

6. R. Goto, Deformations of generalized complex manifolds and locally conformally generalized Kahler structures, Workshop "Complex Geometry and Lie Groups" June 16-20, 2014, Torino Italy June 18,

7. R. Goto, Generalized complex structures and generalized Calabi-Yau metrics, Symplectic Algebraic Geometry 2013, 29 September-2 Oct 30 September, Kansai seminar House, Kyoto

8. R. Goto, Generalized complex structures on 4 -manifolds and generalized hyperkahler structures, The Asian Mathematical Conference 2013, Busan Korea, June 30-July 4, (Ryushi Goto)
〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
後藤 竜司 (Ryushi Goto)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30252571

(2)研究分担者
()

研究者番号：

(3)連携研究者
()

研究者番号：