様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　6 月 12 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2013～2016
課題番号：２５６１００１４

研究課題名（和文）ポテンシャルの幾何学的研究と「最適美術館問題」のプログラム作成

研究課題名（英文）Geometric study of potentials and optimal art gallery problem

研究代表者
今井　淳（Imai, Jun）

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：７０２２１１３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 距離の単調減少関数を核に持つようなポテンシャルの最大点の存在しうる領域の、幾何学的性質をいくつか示した。(2) 超関数論で用いられる手法を適用して、Rieszポテンシャルおよびその積分であるRieszエネルギーの正則化を定式化し、コンパクトボディの場合の留数を求めた(Solanes氏との共同研究)。(3) 平面領域の部屋に、３６０度見渡せる監視カメラを、死角がないように、かつmin-maxの点で最適な位置に置くという「最適美術館問題」のプログラムを、カメラの台数が５以下まで委託作成した。(4) 球面の中の結び目を、エネルギーを減らすように変形するプログラムを外部委託作成した。

研究成果の概要（英文）：(1) Any critical point of a potential with kernel being a monotone function of the distance is included in a minimal unfolded region. Some geometric properties of the minimal unfolded regions have been given. (2) Regularization of the Riesz potential and Riesz energy of a submanifold of the Euclidean space is given. Some of the residues of the Riesz energy thus obtained of a compact body have been computed (joint work with Gil Solanes). (3) A program for the optimal art-gallery problem, which seeks for an optimal position of cameras to monitor a given gallery, has been obtained via outsourcing. (4) A program that can deform a given knot in the unit 3-sphere to decrease the energy has been obtained by outsourcing to Wolfram.

研究分野：幾何学

キーワード：Riesz ポテンシャル　美術館問題　プログラミング

１．研究開始当初の背景

この研究の発端は、「三角形の公園に街灯を１本おくとしたらどこに置くのが良いか」という PISA の問題に対し、福岡大学の柴田先生が、公園が受け取る光の総量を最大にする点を考え、それをその三角形の**灯心**と呼んだことにある。光の総量を与える積分はそのままでは発散してしまうが、超関数論で Hadamard 正則化と呼ばれている手法を用い、領域のポテンシャルの１パラメータ族を得た。

２．研究の目的

ユークリッド空間のコンパクト領域に対し、ある固定点からの距離の s 乗をその領域上積分したものを、その点におけるその領域の**一般 Riesz ポテンシャル**と呼ぶ。ただし、積分が発散する場合には、**正則化**により、有限部分を取り出すものとする。このポテンシャルの最大（冪 s の値によっては最小）を与える点をその領域の **r^s-中心**と呼ぶ。冪 s が２の場合には、重心になる。本研究では、ポテンシャルと r^s-中心の諸性質、特に r^s-中心の唯一性はいつ成立するかなどを研究する。また、プログラミングを外部委託することにより、このポテンシャルを様々な現実問題（ある種の最適問題）、例えば、部屋に何台かの監視カメラを設置するときに、どこに設置するのがよいか、といった**「美術館問題」の最適問題版**などに適用する。

３．研究の方法

研究目的の欄に記したように、本研究には数学的側面と応用・数値実験的側面がある。
数学的側面については、解析のポテンシャル論、微分方程式論、超関数論、幾何の凸幾何学、積分幾何学など、応募者が専門としないものと深く係っているので、その分野の研究者と交流をして、新たな知見を得る。数値実験については、業者(数式処理システム Mathematica を作成している Wolfram 社)にプログラム作成・数値実験を委託する。

４．研究成果

(1) 距離の単調減少関数を核に持つようなポテンシャルの最大点の存在しうる領域の、幾何学的性質をいくつか示した。

(2) 超関数論で用いられる手法を適用して、Riesz ポテンシャルおよびその積分である Riesz エネルギーの正則化を定式化し、コンパクトボディの場合の留数を求めた(Solanes 氏との共同研究)。

(3) 平面領域の部屋に、３６０度見渡せる監視カメラを、死角がないように、かつ min-max の点で最適な位置に置くという「最適美術館問題」のプログラムを、カメラの台数が５以下まで委託作成した。

(4) 球面の中の結び目を、エネルギーを減らすように変形するプログラムを外部委託作成した。

それぞれの項目についての説明を記す。

領域の minimal unfolded region の性質
Riesz ポテンシャルは距離核を持つ。一般に距離に単調関数を核に持つポテンシャルに対して、解析（PDE）で知られている moving plane method を適用すると、ポテンシャルの臨界点が存在しうる範囲を minimal unfolded region （heart とも呼ばれる）に制限することができる。

領域と球体の Minkowski 和をとったり、凸包をとったりすると minimal unfolded region は小さくなることを示した。この成果は論文にまとめた。

Riesz ポテンシャルの正則化

M を R^n の m 次元コンパクト部分多様体とする($m<n+1$)。$V_M(x;z)$を y を動かして M 上 $|x-y|^z$ を積分したもの、$E_M(z)$を x を動かして M 上 $V_M(x;z)$を積分したもの、つまり $M\times M$ 上 $|x-y|^z$ を積分したものとする。この積分は $z>-m$ (z を複素数とする $\mathrm{Re}\, z>-m$) のときに収束する。収束しないとき、発散する積分から有限の値を取り出す方法として、超関数論で知られている二つの方法、Hadamard 正則化と、解析接続を用いる方法を適用する。$E_M(z)$の定義域を解析接続で C 全体に拡げると、一位の極のみを持つ有理型関数が得られる。これをMのベータ関数とよび、$B_M(z)$とかく。

① Hadamard 正則化と、解析接続を用いる方法で、同じものが得られることを示した。

② M がコンパクトボディのとき（M の内部の閉包が M と一致する、つまり $m=n$ のとき）$B_M(z)$の最初の三つの留数を与えた。M の体積、M の境界の体積、境界の主曲率の二次式の積分になる。

以上はスペインの Gil Solanes 氏との共同研究で得られたものであり、その成果はプレプリント
<u>Jun O'Hara</u> and Gil Solanes, Regularized Riesz energies of submanifolds, preprint, arXiv:1512.07935
にまとめた。さらに

③ ある条件（M が余次元を持つ、つまり m<n のときには M の境界は空集合であるという条件）の下、ベータ関数は球体および１，２次元の球面を特徴づけることを示した。この結果は 2017 年 3 月 26 日に日本数学会年会（首都大学東京）において、および 2017 年 2 月 14 日に The 12th East Asian School of Knots and Related Topics （東京大学）において発表した。

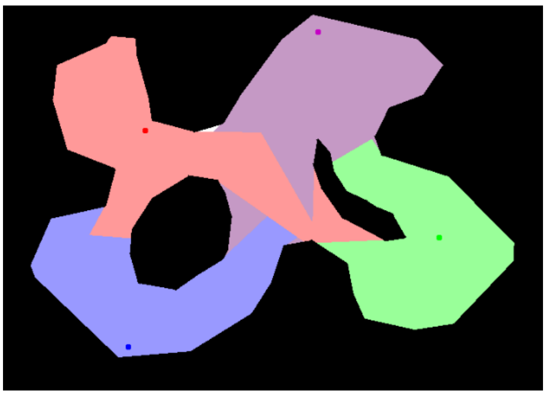
最適美術館問題

美術館問題(art gallery problem)とは、平面領域（特に多角形）Ω のすべての場所を見渡せるようなできるだけ少数の監視カメラの台数（および位置）を求める問題のことである。ただし、監視カメラは３６０度見渡せるものとする。この問題は、計算機科学で研究されてきた。平面領域の境界である折れ線が単純閉曲線で（つまり領域が単連結で）その頂点数が n ならば、必要なカメラ台数は n/3 以下である、ということが知られている。本研究では、以下の問題（**最適美術館問題**と呼ぶことにする）を考察する：

問題:
平面領域 Ω と必要最小台数以上のカメラ台数が与えられたとき、何等かのポテンシャルの意味で「最適な」カメラ位置を求めよ。
また、そのためのプログラム作成・改良に必要な数学的な基礎づけを与えよ。

本研究では、ポテンシャルとして、min-max 関数、すなわち一番近いカメラまでの距離の領域 Ω 上での最大値をとる。これを最小にするようなカメラの配置を求める。すると各カメラに対して、``監視ボロノイ領域''が定まる。

プログラムをその当時首都大学東京の大学院生だった福田開大君に委託作成した。これは、ギャラリー（必ずしも凸とは限らなくてもよい多角形領域）と 5 台以下のカメラの初期位置をプロットして入力すると、上の min-max 関数を小さくするようにカメラ位置を動かしていくものである。



作成したプログラムで得られた図。色のついた４つの点は監視カメラの位置をあらわす。色のついた領域は同色の監視カメラに対応する監視ボロノイ領域。この例の場合、どのカメラからも監視されていな部分（白い部分）がある。また、非連結な監視ボロノイ領域も存在する。

ソフトとその説明をホームページ上に公開している。

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所(IMI)を約１週間訪問し、この問題について議論した。そして、この問題が NP 困難であることが判明した。このため、完全に一般化された状況を扱うこと、およびポテンシャルとしてより複雑は Riesz ポテンシャルを用いることは断念した。

球面内の結び目のエネルギーの数値実験

S^3 を R^4 の単位球面とし、K をその中の結び目とする。z=-2 のときの K のベータ関数 B_K(-2)を、二点間の距離として R^4 で測った距離 |x-y| ではなく、S^3 で測った距離 2arcsin(|x-y|/2) を用いて定義したもの $E_{S^3}(K)$を考える。
エネルギーを減らすように結び目を変形するとき、エネルギーとしてこの $E_{S^3}(K)$を用いるのと、二点間の距離として R^4 で測った距離|x-y|を使う $B_K(-2)$を用いるのとでは結果が異なる（前者なら合成結び目型にエネルギーを最小にするようなものが存在し、後者には存在しない）と予想している。
この研究のための第一歩として、E_{S^3} を減らすように結び目を変形するプログラムを Wolfram 社（有名なソフトウェアである mathematica を作っている会社）に委託作成した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　８件）
（注：英語論文では旧姓の O'Hara を用いている）

(1) <u>Jun O'Hara</u>, Kentaro Mikami and Kunio Sugawara, Triangles with sides in arithmetic progression, Elem. Math. 72 (2017) 75-79. 査読有 DOI: 10.4171/EM/327

(2) <u>Jun O'Hara</u> and Gil Solanes, Möbius invariant energies and average linking with circles, Tohoku Math. J. 67 (2015), 51-82. 査読有 https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1429549579

(3) Jun O'Hara, Minimal unfolded regions of a convex hull and parallel bodies, Hokkaido Math. J. 44 (2015), 175-183. 査読有 https://projecteuclid.org/euclid.hokmj/1470053289

(4) Jun O'Hara and H. Funaba, Möbius invariant energy of tori of revolution, Journal of Physics: Conference Series, Volume 544, Issue 1, article id. 012019 (2014). 査読有 http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/544/1/012019

(5) Jun O'Hara, Measure of a 2-component link, Tohoku Math. J. 65 (2013), 427-440. 査読有 https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1378991024

(6) Jun O'Hara, Remi Langevin and Shigehiro Sakata, Application of spaces of subspheres to conformal invariants of curves and canal surfaces, Ann. Polon. Math. 108 (2013), 109-131. 査読有 DOI: 10.4064/ap108-2-1

(7) Jun O'Hara, The configuration space of equilateral and equiangular hexagons, Osaka J. Math. 50, (2013), 477-489. 査読有 http://ir.library.osaka-u.ac.jp/dspace/bitstream/11094/25093/1/ojm50_02_477.pdf

(8) Jun O'Hara, Isoperimetric characterization of the incenter of a triangle, Elem. Math. 68 (2013), 78-82. 査読有 doi: 10.4171/EM/223

〔学会発表〕（計 3 件）

(1) Jun O'Hara, From energy of knots to regularized Riesz energy of submanifolds, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics, 14 Feb 2017, 東京大学（東京都・目黒区）.

(2) Jun O'Hara, Regularization of energies of knots and surfaces, Geometric energies with links to applications, topology and open problems, 03 Sept 2015, バーゼル（スイス）.

(3) Jun O'Hara, Three topics in knot energies, Geometric knot theory, 30 Apr 2013, Oberwolfach （ドイツ）.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

https://sites.google.com/site/junohara/home

６．研究組織

(1)研究代表者
今井　淳　（IMAI JUN）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70221132

(2)研究分担者
酒井　高司　（SAKAI TAKASHI）
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号： 30381445

(3)連携研究者
濱田　龍義　（HAMADA TATSUYOSHI）
日本大学･生物資源学部･准教授
研究者番号： 90299537

(4)研究協力者
（　　）