

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 25 日現在

機関番号：37111

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610016

研究課題名(和文)平均曲率フローのセルフ-シュリンカーとその応用に関する挑戦的研究

研究課題名(英文)Challenging study on self-shrinkers of mean curvature flow and applications

研究代表者

成 慶明 (Cheng, Qing-Ming)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：50274577

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：ラプラス作用素に関するOmori-Yauの広義最大値原理を、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカー上のL-作用素に拡張した。それを用いて平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーを研究し、3次元Euclid空間内の第2基本形式の長さが一定で平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーを完全に分類した。多項式面積増大をもつ完備セルフ-シュリンカーの第2基本形式の長さを研究し、完備セルフ-シュリンカーの第2基本形式の長さが一定で、その第2ギャップが存在することを示した。L-作用素の固有値問題を研究し、固有値に関する普遍不等式を得て、漸近的な意味で固有値の最適な上限及び下限を与えた。

研究成果の概要(英文)：We generalize the maximum principle due to Omori and Yau for Laplacian to L operator on complete self-shrinkers of mean curvature flow. Making use of this generalized maximum principle for L operator, we study complete self-shrinkers of mean curvature and give a complete classification for 2-dimensional complete self-shrinkers in the 3-dimensional Euclidean space. Furthermore, for complete self-shrinkers of mean curvature flow with polynomial area growth, we get the second pinching constant of the constant length of the second fundamental form. We also prove a universal inequality on eigenvalues of L operator in complete self-shrinkers. According to this universal inequality, we obtain an upper bound and a lower bound of eigenvalues for L operator in complete self-shrinkers.

研究分野：幾何学

キーワード：平均曲率フロー 最大値原理 部分多様体 セルフ-シュリンカー 面積汎関数の変分

1. 研究開始当初の背景

平均曲率フローに関する研究は Euclid 空間内の部分多様体の微分幾何学に関する研究において、極めて重要である。Huisken (J. Diff. Geom., 1984) は、コンパクト凸超曲面を初期値超曲面とする平均曲率フローが一点に縮まるまでに、滑らかな性質と凸の性質を保つことを示した。レスケーリングにより、このフローは球面に収束する。さらに、平均曲率フローの特異点に関する研究は近年大変注目されている。平均曲率フローは Euclid 空間内の埋め込みコンパクト超曲面を縮小し、最終的に発展超曲面が消滅となる。ゆえに、このような特異点は不可避である。Huisken (J. Diff. Geom., 1990), Colding-Minicozzi (Ann. of Math., 2012) は、平均曲率フローのセルフ-シュリンカーの研究を通して、平均曲率フローの一般的な特異点に関する研究を行った。セルフ-シュリンカーは平均曲率フローの特異点での全ての可能なブロー・アップを表すため、平均曲率フローに関する研究に重要な役割を果たしている。Colding-Minicozzi は平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカー(超曲面の場合)を詳細に研究し、非負平均曲率及び多項式型の面積増大度をもつような完備セルフ-シュリンカー(超曲面の場合)を分類した。

2. 研究の目的

本研究では平均曲率フローの任意余次元完備セルフ-シュリンカー(self-shrinker)を研究し、その分類に関する研究を行う。平均曲率フローの任意余次元完備セルフ-シュリンカーの面積の増大度に関する研究について、面積の増大度が多項式型でないセルフ-シュリンカーの存在性を徹底的に究明する。さらに、平均曲率フローのセルフ-シュリンカーの研究成果を用いて、単位球面内のコンパクト極小超曲面の分類に関する研

究に適用する。平均曲率フローを道具として、4次元リーマン多様体の位相構造を解明するように努める。

3. 研究の方法

(1) 平均曲率フローの任意余次元完備セルフ-シュリンカーに関する研究方法としては、任意余次元完備セルフ-シュリンカーの F-安定性作用素に着目し、単位球面内の極小部分多様体の幾何学に関する研究方法と平均曲率フローのセルフ-シュリンカーの研究方法を融合し、L-作用素の固有関数と固有値に関する研究を行い、完備セルフ-シュリンカーを分類する。

(2) 完備リーマン多様体上のラプラス作用素の Omori-Yau の広義最大値原理の証明方法を用いて、L-作用素の広義最大値原理に関する研究を行う。L-作用素の広義最大値原理を利用して、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーを研究する。

(3) 積分公式を巧く利用して、平均曲率フローの多項式面積増大度をもつ完備セルフ-シュリンカーの分類に関する研究を推進する。

4. 研究成果

(1) 完備リーマン多様体上のラプラス作用素に関する Omori-Yau の広義最大値原理を、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカー上の L-作用素に拡張し、それを用いて平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーの分類研究で研究成果を上げ、多項式面積増大度に関する条件を仮定せず、平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーの剛体性定理を示した。単位球面内の極小超曲面の研究手法と平均曲率フローのセルフ-シュリンカーの研究方法を融合し、多項式面積増大度をもつ完備セルフ-シュリンカーの第2基本形式の長さを研究した。我々は完備セルフ-シュリンカーの第2基本形式の長さが一定でそれに関する第2ギャップが存在すること

を示した。Colding-Minicozzi (Ann. of Math., 2012)の論文で仮定した多項式面積増大度をもつ条件を徹底的に調べ、この条件は本質的な条件であることが分かった。さらに、 L -作用素の広義最大値原理を用いて、3次元 Euclid 空間内の第2基本形式の長さが一定で平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーを完全に分類した。Ding-Xin(Trans. Amer. Math. Soc., 2014)は多項式面積増大度をもつような条件のもとで、同じような結果を証明したが、我々は氏らの条件を外した。

(2). 完備リーマン多様体内の有界領域におけるラプラス作用素の固有値に関する研究で使われている Cheng-Yang (J. Math. Soc. Jpn, 2006, Math. Ann., 2007) の研究方法を L -作用素に適用し、 L -作用素の固有値問題の固有値を研究した。 L -作用素の固有値に関する普遍不等式を示した。さらに、我々は Cheng-Yang (Math. Ann., 2007)の漸化式を利用し、固有値に関する最適な上限及び下限を与えた。

(3). 重み付き体積保存平均曲率フローの n -超曲面の研究について、良い性質を持つ関数に L -作用素を適用することにより、多項式面積増大度をもつ完備 n -超曲面の分類定理を与えた。さらに、ラプラス作用素の Omori-Yau の広義最大値原理を、重み付き体積保存平均曲率フローの n -超曲面上の L -作用素に拡張し、多項式面積増大度を仮定しない完備 n -超曲面のギャップ定理を証明した。重み付き体積保存平均曲率フローの n -超曲面の構成問題を取り込んで、標準的でない n -超曲面の例が殆どに知られてないため、興味深い n -超曲面の例を具体的に構成することが極めて重要である。本研究ではこのような研究を行い、大きな進展を与えた。

(4). 単位球面内のスカラー曲率が一定でコンパクト超曲面の安定な指標(index)に関する研究を行い、重要な研究成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

(1). Qing-Ming Cheng, Critical Points of the Weighted area functional, Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 154, pp. 4-1-4-16, DOI 10.1007/978-4-431-56021-04.

(査読有)

(2). Qing-Ming Cheng and S. Ogata, 2-dimensional complete self-shrinkers in \mathbb{R}^3 , to appear in Math. Z., 2016, DOI 10.1007/s00209-016-1665-2. (査読有)

(3). Qing-Ming Cheng, S. Ogata and G. Wei, Rigidity theorems of n -hypersurfaces, to appear in Comm. Anal. Geom., 2016. (査読有)

(4). Qing-Ming Cheng and G. Wei, A gap theorem of self-shrinkers, Trans. Amer. Math. Soc., 367(2015), 4895-4915. S 0002-9947(2015)06161-3 (査読有)

(5). Qing-Ming Cheng and Y. Peng, Complete self-shrinkers of the mean curvature flow, Calculus of Variations and PDEs, DOI 10.1007/s00526-014-0720-2, 52(2015), 497-506. (査読有)

(6). Qing-Ming Cheng, H. Li and G. Wei, The stability index of hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 144A (2014), 447-453.

(査読有)

(7). Qing-Ming Cheng and Y. Peng, Self-shrinkers of the mean curvature flow, Proceedings of the workshop on differential geometry of submanifolds and its related topics, World Sci. 2013, pp. 147--163. (査読有)

(8). Qing-Ming Cheng and Y. Peng, Estimates for eigenvalues of L operator on self-shrinkers, Comm. Contemporary Math., 15 (2013), 1350011-1-1350011-23. DOI: 10.1142/S0219199713500119 (査読有)

[学会発表](計 16 件)

(1) Qing-Ming Cheng, Complete self-shrinkers, Seminar on Mathematics, March 25, 2016, Guangxi Normal University, Guilin, China

(2) Qing-Ming Cheng, Geometry of λ -hypersurfaces of the weighted volume-preserving mean curvature flow, 日本数学会年会企画特別講演, 日本数学会年会, 2016年3月16日-19日, 筑波大学

(3). Qing-Ming Cheng, Geometry of critical points of weighted area functional, School & Workshop on Geometric Analysis, December 7-11, 2015, KIAS, Korea.

(4). 成慶明, 汎関数の臨界点の幾何学, 広島幾何学研究集会 2015, 2015年10月7日-9日, 広島大学.

(5). Qing-Ming Cheng, Geometry of λ -hypersurfaces, International conference on geometry and topology of submanifolds, September 25-28, 2015, Henan Normal University, Henan, China.

(6). Qing-Ming Cheng, Geometry of critical points of functional, Seminar on Differential Geometry, June 23, 2015, Wuhan University, Wuhan, China.

(7). 成慶明, 重み付き体積を保つ平均曲率フロー, 研究集会「リーマン幾何と幾何解析」, 2015年3月6日-7日, 筑波大学.

(8). Qing-Ming Cheng, Complete λ -hypersurfaces of the weighted volume-preserving mean curvature flow, Seminar on Differential Geometry, March 24, 2015, Sichuan University, Chengdu, China

(9). Qing-Ming Cheng, The weighted volume-preserving mean curvature flow, Seminar on Differential Geometry, Jan. 15, 2015, South China Normal University, Guangzhou, China

(10). Qing-Ming Cheng, Critical points of the weighted area functional, The 10th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan, September 6-12, 2014, Fudan University, Shanghai, China

(11). Qing-Ming Cheng, The weighted volume-preserving variations, Workshop on Differential Geometry, August 28, 2014, Henan Normal University, China.

(12). Qing-Ming Cheng, On the weighted area functional, Seminar on Chern Institute of Mathematics, August 7, 2014, Nankai University, Tianjin, China.

(13). Qing-Ming Cheng, Critical points of the weighted volume functional, Seminar on Differential Geometry, March 25, 2014, Fujian Normal University, Fuzhou, China.

(14). Qing-Ming Cheng, Self-shrinkers of mean curvature flow, International Workshop on Differential Geometry 2014, Feb. 14-16, 2014, Hotel New Imari, Imari.

(15). Qing-Ming Cheng, Complete self-shrinkers of the mean curvature flow, The Eleventh Pacific Rim Geometry Conference, December 10-14, 2013, Fudan University, Shanghai, China.

(16). 成慶明, 平均曲率フローの完備セルフ-シュリンカーについて, 九州大学幾何学セミナー, 2013年9月22日, 九州大学

[その他]
ホームページ等

<http://www.cis.fukuoka-u.ac.jp/~cheng/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

成 慶明 (Cheng Qing-Ming)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号 : 50274577