様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 １７ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2013～2015
課題番号：２５６１００１７

研究課題名（和文）ダストを許したハルナック不等式の研究

研究課題名（英文）Harnack inequalities with dusts

研究代表者
相川　弘明（Aikawa, Hiroaki）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：２０１３７８８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：ハルナック不等式とは同一の中心をもつ大小の球を考えたとき，大きい球内での正値調和関数の小さい球内での値は中心の値の定数倍で比較されるという不等式である．有限個の球が半径に比例する十分大きい共通部分をもってつながっているものをハルナック連鎖という．ハルナック連鎖を構成する一つ一つの球にハルナック不等式を繰り返し用いることにより，ハルナック連鎖上の正調和関数の両端の値は比較可能なることをハルナック原理という．本研究ではハルナック連鎖の中に容量の小さな除外集合があっても，ハルナック原理が成立することを示し，その応用を与えた．

研究成果の概要（英文）：Consider concentric two balls. If h is a positive harmonic function in the larger ball, then its values on the smaller ball is comparable to the value of h at the center (Harnack inequality). A Harnack chain is the union of balls such that consecutive balls have sufficiently large intersection. Applying the Harnack inequality to each constituent ball yields that a positive harmonic function on the Harnack chain assumes comparable values at the centers of the first and last balls (Harnack principle). We have shown that the same Harnack principle holds even if there exists an exceptional set in the Harnack chain, provided the capacity of the exceptional set in each ball is sufficiently small.

研究分野：解析学

キーワード：Harnack不等式　Harnack連鎖　除外集合　容量　境界Harnack原理　調和測度　擬双曲距離　熱核

## １．研究開始当初の背景

正調和関数の値を比較する Harnack 不等式は極めて重要な基本不等式である．一言で言えば Harnack 不等式は同一の中心をもつ大小の球を考えたとき，大きい球内での正値調和関数の小さい球内での値は中心の値の定数倍（大小の球の半径比にのみ依存）で比較されるという不等式である．有限個の球が半径に比例する十分大きい共通部分をもってつながっているものを Harnack 連鎖という．Harnack 連鎖を構成する一つ一つの球に Harnack 不等式を繰り返し用いることにより, Harnack 連鎖上の正調和関数の両端の値は比較可能（Harnack 連鎖の長さによる）ことが分かる．これを Harnack 原理という．

Harnack 不等式，Harnack 原理は古典的な調和関数に対しても様々な応用があり，より一般の方程式の正値解に拡張したいという要求は極めて高かった．今日ではいわゆる De Giorgi-Nash-Moser の方法によって楕円型・放物型の(非)線型方程式の正値解に Harnack 不等式が一般化され, 数多くの応用が得られている．古典的な調和関数の場合とは異なり, この方法はソボレフ-ポアンカレの不等式に基づく変分法的なものであるが，最終的なステートメントは古典的な Harnack 不等式とほとんど同じである．すなわち，正調和を楕円型方程式の正値解に直すだけである．この Harnack 不等式を Harnack 連鎖にそって繰り返していけば，楕円型方程式の正値解に対する Harnack 原理がたちどころに得られる．De Giorgi-Nash-Moser の方法の改良・一般化に対する文献は極めて多いが, Harnack 不等式から Harnack 原理に行くところは，古典的な調和関数の場合から，何も進歩していない. Harnack 不等式を単純に繰り返しているだけであった.

## ２．研究の目的

この研究の着想は「Harnack 連鎖は最良だろうか?」という疑問から起こった． 調和関数と Brown 運動の密接な関係から，Brown 運動に障害を与えない程度の「小さな」除外集合（ダストと呼ぼう）が許容されるのが直観である．実際，ダストの容量が 0，すなわち極集合であれば, Harnack 連鎖からダストを除いたところの有界正値調和関数は除去可能集合の上まで調和に拡張される（調和関数の除去可能定理）．したがって，有界正値調和関数に限れば, Harnack 不等式はそのまま拡張される．しかし，ダストの容量が正である時には自明ではない．その大きさを正確に測る必要がある．2 つの球を曲面で切り離すことができるから，Lebsegue 測度では明らかに不十分で，最低でも n-1 次元の Hausdorff 測度の尺度で測る必要がある.

以上のような予備的な考察から, Harnack 連鎖に許容されるダストの大きさを測り，Harnack 不等式の繰り返しを何らかの意味で行って, Harnack 原理が成り立つことを示すのが目的である．このプロセスは古典的な調和関数の場合でさえ，考えられてこなかった．したがって，本質を明らかにするにはまず調和関数のときを考察する．この研究では除外集合の容量を定量的に測り，それが正であっても十分小さければ, Harnack 不等式の繰り返しが成立することを示す．すなわち次の形の定理を明らかにする．

**定理．** $B_0 \sim \cdots \sim B_N$ を Harnack 連鎖，$E$ を $B_1 \cup \cdots \cup B_{N-1}$ 内のコンパクト除外集合，$h$ を $(B_1 \cup \cdots \cup B_{N-1}) \setminus E$ 上の正調和関数とする．このとき E の容量が十分小さけれ

$$\frac{h(x_N)}{h(x_0)} \leq A^N$$

となる．ただし A>1 は N や h，E の形状に依存しない定数である．

## ３．研究の方法

容量とその平衡分布について深く考察する．目標とする定理の $(B_1 \cup \cdots \cup B_{N-1}) \setminus E$ を $\Omega$ とし，$\Omega$ に対する調和測度を考える．正調和関数は調和測度の積分で与えられるから，調和測度に関する適切な評価が得られれば良い．そのために調和測度を掃散で表し，掃散と平衡分布の関連から，ダストを打ち消すようなイテレーションスキームを作る．各球内のダストの容量が小さいことからこのスキームは可能であり，帰納法によって調和測度の評価を得る．さらに技術的なことであるが, 帰納法が働くように，Harnack 連鎖がループしないようにしておく．Harnack 連鎖の長さは擬双曲距離と比較可能であり，擬双曲距離に付随したループしない Harnack 連鎖を構成する．
以上のアウトラインを国内外で発表し，数多くの研究者に聞いて貰うことにより，フィードバックを得る．そのプロセスによって自分自身の構想を整理し，再び発表することによって，議論の本質を抽出する．さらに論文執筆・講演・発表を繰り返して理論の純度を高め，関連する話題へ応用することにより，理論の幅を広げていく．

## ４．研究成果

目的としていた「ダストを許した Harnack 不等式」は完成し, 解析学で伝統のある J. Anal. Math. 誌から出版することができた．この不等式は見かけは Harnack 連鎖に除外集合を認めるもので，内部 Harnack 不等式の拡張のように思われるが，実は境界 Harnack 原

理に応用がある．特に境界がグラフで与えられる領域に対しては，境界付近から内部に向かって大きさ一定の球の列を取ると，球内にある領域の外部はだんだん減っていって，最終的には球が完全に領域内に含まれるようにできる．いったん領域内部に入ってしまえば，よく知られた通常の Harnack 不等式を用いた評価が可能である．本研究の成果である「ダストを許した Harnack 不等式」は境界付近でも，あたかも領域外部が存在しないかのような，Harnack 不等式を与え，その結果として，対数 Hölder 領域で指数が１より大きい場合に境界 Harnack 原理が成立することが分かった．

一方，熱核を時間積分すると調和関数に関する Green 関数が得られることから，Harnack 不等式は放物型問題とも密接に関係しており，きわめて複雑な領域に対する放物型境界 Harnack 原理や熱核の Intrinsic Ultracontractivity を導くことができた．これは 60 ページを超える長編の論文となり，調和解析で顕著なスペインの雑誌 Rev. Mat. Iberoam. から発表した．さらに，境界 Harnack 原理成立のための境界の滑らかさがシャープであることが分かった．J. London Math. Soc.誌において，対数 Hölder 領域で指数が１より小さいもので境界 Harnack 原理が成立しないものを構成したからである．これら 3 つの結果はすべて本研究の目的である「ダストを許した Harnack 不等式」から発生したものである．さらに，その一部の議論は非線形ポテンシャル論にも適用できて，容量密度の 0-1 法則を導くことができた．これは Proc. Amer. Math. Soc.で出版され，さらに距離測度空間への拡張へと研究が継続している．

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4 件）


① H. Aikawa, Construction of a domain that fails the global boundary Harnack principle via the Helmholtz equation, J. London Math. Soc. (2016)，OnlineFrist 査読有 Doi: 10.1112/jlms/jdw016

② H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity via capacitary width, Rev. Mat. Iberoam., 31, 3 (2015), 1041-1106，査読有 Doi: 10.4171/RMI/863

③ H. Aikawa and T. Itoh, Dichotomy of global capacity density, Proc. Amer. Math. Soc., 143, 12 (2015), 5381-5393，査読有 Doi: 10.1090/proc/12672

④ H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, J. Anal. Math., 124 (2014), 83-116，査読有 Doi: 10.1007/s11854-014-0028-3


〔学会発表〕（計　10 件）


① H. Aikawa, Construction of a log Hölder-type domain which fails the global boundary Harnack principle, The 11th HU and SNU Symposium on Mathematics --Mathematical Analysis and Applications-- as part of The 18th HU-SNU Joint Symposium, Seoul National University, 27 November, 2015 ソウル（韓国）

② 相川弘明： Boundary Harnack Principles on a domain given by a graph, 首都大学東京・数理解析セミナー, 2015 年 11 月 6 日，首都大学東京 8 号館 6 階 618 室（東京都・八王子市）

③ H. Aikawa, Elliptic and parabolic boundary Harnack principles for nonsmooth domains, PDEs, Potential Theory, and Function Spaces, Linköpings Universitet (Sweden), 18 June 2015 リンショーピング（スウェーデン）

④ H. Aikawa, Dichotomy of global capacity density, The 10th HU and SNU Symposium on Mathematics - Recent progress on theory of probability and partial differential equations -, 28 November 2014，北海道大学（北海道・札幌市）

⑤ H. Aiakwa, Unified approach to elliptic and parabolic boundary Harnack principles I and II, Workshop on Nonlinear PDE at Tohoku University, Sendai，13-14 November 2014，東北大学（宮城県・仙台市）

⑥ H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and its applications, The 22nd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Dongguk University, Gyeongju, Korea, 9 August 2014 キョンジュ（韓国）

⑦ H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle, 7th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, Seoul National University, Seoul, Korea, 6 August 2014 ソウル（韓国）

⑧ 相川弘明：Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle, 第 107 回熊本大学応用解析セミナー，熊 2014 年 7 月 26 日，本大学大学院自然科学研究科（熊本県・熊本市）

⑨ 相川弘明：Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle, 第 16 回金沢解析セミナー2014 年 6 月 27 日，金沢大学自然科学 5 号館（石川県・

金沢市）

⑩ H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle --- A unified approach with capacitary width, Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics, 23 June 2013, 東京工業大学（東京都・目黒区）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~aik/

６．研究組織
(1)研究代表者
相川 弘明（AIKAWA, Hiroaki ）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20137889

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：