

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2016

課題番号：25610018

研究課題名(和文)マルコフ過程の緊密性と準定常分布

研究課題名(英文)Quasi-stationary distribution for Markov processes with tightness property

研究代表者

竹田 雅好 (Takeda, Masayoshi)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：30179650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：既約性、強フェラー性、緊密性をもつ対称マルコフ過程のクラス(クラス(T)とよぶ)の準定常分布の存在と一意性について考察した。まず、クラス(T)に属するマルコフ過程の定める半群は、対称化測度に関する2乗可積分空間上の作用素としてコンパクト作用素であることが示せた。そのことから基底が存在が分かり、基底が可積分であれば準定常分布が構成できる。指導学生・三浦佑介の結果を用いると、クラス(T)に属するマルコフ過程の半群が内在的超縮小性をもてば、準定常分布の存在と一意性が示せる。特に、一次元拡散過程に対して内在的超縮小性に関する富崎の結果を応用することで、特異な場合にも準定常分布の存在と一意性が示せた。

研究成果の概要(英文)：I consider the existence and uniqueness of quasi-stationary distributions (QSD) for irreducible, strong Feller, symmetric Markov processes with tightness property. A Markov process with these properties is said to be in Class(T). I show that the semi-group of a Markov process in Class (T) is a compact operator, and thus the ground state of the Markov generator exists. We see that if the ground state is integrable with respect to the symmetrized measure, a QSD can be constructed explicitly. I can see from a result of Y. Miura, my teaching doctoral student, that if the semigroup of the symmetric Markov process in Class (T) is intrinsic ultracontractive, the existence and uniqueness of QSD follows. Combining Miura's result with Tomisaki's result on the intrinsic ultracontractivity, we can show the existence and uniqueness of QSD for one-dimensional diffusion processes in terms of speed measure and scale function.

研究分野：確率論

キーワード：準定常分布 対称マルコフ過程 半群の超縮小性 ヤグロム極限

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 一次元拡散過程に対しての準定常分布に関する研究は多く存在する。しかし、多次元の確率モデルに対しては、準定常分布の存在・一意性に関する満足できる理論はない。境界の複雑さのため、一次元拡散過程におけるフェラーの境界分類に対応する理論が存在しないことにその理由である。そこでいきなり一般の多次元マルコフ過程を研究対象にするのではなく、一次元拡散過程に近い性質を有する多次元マルコフ過程のクラスを導入することが大切になる。本研究では、既約性、レゾルベント強フェラー性とともに鍵となる新しい性質、緊密性を持つ対称マルコフ過程のクラス(以下、クラス(T)と呼ぶ。)を、一次元拡散過程の次に考察すべき対象として提案する。このクラスに属する対称マルコフ過程で生存時間が有限ならば、フェラーの境界分類で正則または脱出境界条件を有する一次元拡散過程のように早い爆発が起こり、保存的な場合には、コンパクト集合への到達時刻が指数可積分性をもち流入境界と似た性質を持つ。

(2) 準定常分布は、生成作用素の基底を用いて構成される。基底の存在のためにはマルコフ半群のコンパクト性が十分条件となる。そのコンパクト性は関数不等式をとおして解析的に調べられてきた。しかし、状態空間が可微分構造を持つ場合に限られ、特異な状態空間上の半群に対しては、関数不等式に依らず定性的な条件でコンパクト性を判定することが望まれる。

### 2. 研究の目的

(1) 既約性、レゾルベント強フェラー性、緊密性を持つ対称マルコフ過程のクラスを導入し、その著しい確率論的性質を調べる。特にそのスペクトル論的性質を調べることで、準定常分布の存在・一意性を多次元の確率モデルに対して示す。

(2) 可微分構造を持たない特異な状態空間上の半群に対して、関数不等式に依らない定性的なコンパクト性の証明方法を確率論的手法で与える。

(3) ヤグロム極限を処罰問題の特別な場合とみなし、極限測度の特徴付けを一般の乗法汎関数に対して与える。

### 3. 研究の方法

(1) 準定常分布を明示的に構成するためには、マルコフ作用素の基底の存在を示すことが必要になる。その十分条件として、マルコフ半群のコンパクト性を示せばよい。マルコフ半群のコンパクト性は解析的にも詳しく調べられてきた。ここでは、レゾルベントの性質を用いて導入されるマルコフ過程の緊密性という概念を全面的に用いる。コンパク

ト性に関しては、土田兼治(防衛大)、田原喜宏(長岡高専)と研究連絡を密にとる。

(2) 緊密性は、マルコフ過程が強いエルゴード性を持つ場合か、または早く爆発する場合に満たされる性質である。確率論的な変換によりクラス(T)に属するマルコフ過程が構成されるかどうかを確認することは興味深い。数学的な副産物として、ヤグロム極限の存在と処罰問題における極限測度の特徴付けを一般の乗法汎関数に対して行い、準定常分布、ヤグロム極限を処罰問題における極限定理とみて統一的に考察する。変換論に関しては、桑江一洋(福岡大)、金大弘(熊本大)と研究連絡を密にとる。

### 4. 研究成果

(1) 「クラス(T)に属するマルコフ過程のマルコフ半群が内在的超縮小性を持てば、準定常分布の存在と一意性が従う。」という定理として主結果をまとめることができる。この定理を応用するためには、緊密性を確認することが最重要になる。本研究では、ランダムな時間変更によって定義されるマルコフ過程の緊密性について、時間変更を定義する加法汎関数ないしは対応するルヴェース測度がグリーン緊密性を持つ加藤クラスの測度であればよいことを示した。一次元拡散過程の場合には、境界がフェラーの意味で自然境界を持たなければ緊密性をもつことが示せる。クラス(T)に属するマルコフ過程が定める半群は、対称化測度に関する二乗可積分空間上の作用素としてコンパクト作用素であることが示せた。そのことから基底の存在が従い、基底がさらに可積分であれば準定常分布が明示的に構成できる。指導学生・三浦佑介の結果を用いると、クラス(T)に属するマルコフ過程の半群が内在的超縮小性を持てば、準定常分布の存在と一意性が示せる。特に、一次元拡散過程に対しては、内在的超縮小性に関する富崎松代の結果を使うと、スピード測度、スケール関数が特異な場合にも準定常分布の存在と一意性が示せる。流出境界であるようなスピード測度が無限測度になる場合についても準定常分布の存在と一意性が示せることになり、ロジスチック・モデルなどの興味深い例についても、従来の証明法より見通しの良い多次元に拡張可能なものである。

(2) 処罰問題における極限測度の特徴付けに関しては、指導学生・和田正樹が対称安定過程の場合のファイマン・カツツ処罰問題を解いた。そこでは、本研究に関連して研究してきたシュレディンガー作用素に対する劣臨界性、臨界性、優臨界性の解析的な判定方法が重要な役割を果たした。

(3) クラス(T)に属するマルコフ過程が保存的な場合には、非常に強いエルゴード性、

すなわちコンパクト集合の補集合からの脱出時刻が指数可積分性をもつことが示せ、この事実を用いて初期値に関する一様なドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理の成立を証明できる。吸収壁マルコフ過程がクラス(T)に属することが確認される場合、基底を用いた  $h$ -変換によって構成された対称マルコフ過程が、クラス(T)に属する保存的な対称マルコフ過程になることが示せる場合がある。そのときには一様なドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理を応用することで、局所一様なドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理の下からの評価を、吸収壁マルコフ過程に対して示せることが分かった。ヤグロム極限において、準定常分布への収束の早さに応用できると考えている。

(3) 派生する数学的な問題に関して、いくつかの定理を得た。和田正樹とシュレディンガー作用素が臨界的なとき、対応するファインマン-カツツ汎関数期待値の長時間漸近挙動を与えた。マルコフ過程の消滅が負のポテンシャルをもつファインマン-カツツ汎関数で与えられるときのヤグロム極限を示すのに応用できる。また準定常分布の存在に必要な半群のコンパクト性については、確率論的な確認方法を提案した。土田兼治(防衛大)、田原喜宏(長岡高専)との共同研究で、具体例でその確認方法を検証し、マルコフ半群とシュレディンガー半群のコンパクト性の十分条件を確率論的な新しい方法で与えた。ロビン境界条件を持つブラウン運動が生成する半群に応用することが考えられる。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

<sup>1</sup> 竹田雅好, Tightness property of a symmetric Markov process and the uniform large deviation principle, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, 141 (2013) 4371-4383, DOI:10.1090/S0002-9939-2013-11696-5

<sup>2</sup> 竹田雅好, Variational formula for Dirichlet forms and existence of ground states, J. Functional Analysis, 査読有, 266(2014)660-675, DOI: 10.1016/j.jfa.2013.10.024

<sup>3</sup> 竹田雅好, Criticality and subcriticality of generalized Schroedinger forms, Illinois J. Math. 査読有 58, (2014), 251-277. <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1427897177>

<sup>4</sup> 竹田雅好,  $L^p$ -independence of growth

bounds of Feynman-Kac semigroup and its applications, 数理解析研究所講究録, 査読無 1969(2015), 101-122. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1969-08.pdf>

<sup>5</sup> 竹田雅好, Criticality for Schroedinger type operators based on recurrent symmetric stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 査読有 368 (2016) 149-167, DOI:10.1090/tran/6319

<sup>6</sup> 竹田雅好, 和田正樹, Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, Math. Nachr. 査読有 289 (2016) 2069-2082, DOI: 10.1002/mana.201500136

[学会発表](計6件)

<sup>1</sup> 竹田雅好, Criticality and Subcriticality of Generalized Schroedinger Forms, Conference ``Dirichlet Forms and Applications: Oberwolfach Meeting, Oberwolfach Institute(Oberwolfach, Germany)2014, 10/20.

<sup>2</sup> 竹田雅好, 緊密性を持つ対称マルコフ過程のスペクトルの性質について, マルコフ過程とその周辺, ヴェルク横須賀研修室(横須賀市), 2016, 1/10-1/10.

<sup>3</sup> 竹田雅好, シュレディンガー作用素の熱核評価とリース変換, 広島・岡山解析確率論セミナー, 広島大工学部(広島市), 2016, 2/22.

<sup>4</sup> 竹田雅好, Spectral properties of symmetric Markov processes with tightness property, International Conference, Stochastic Partial Differential Equations and Related Fields, Bielefeld Univ.(Bielefeld, Germany) 2016, 10/11.

<sup>5</sup> 竹田雅好, Some properties of symmetric Markov processes with tightness property, Workshop on Markov processes and its geometric aspects, 福岡大学理学部(福岡市), 2017, 3/8.

<sup>6</sup> 竹田雅好, Criticality and Subcriticality for Positive Schroedinger Forms, 国際研究集会「Dirichlet forms and their geometry」, 東北大学・情報工学研究科(仙台市), 2017, 3/22,

[図書](計0件)

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹田 雅好 (Takeda, Masayoshi)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：30179650

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：

(4) 研究協力者

( )