

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 19 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610024

研究課題名(和文)楕円型方程式に関係する新しい等周不等式の探索

研究課題名(英文) Search for new isoperimetric inequalities relating to elliptic equations

研究代表者

坂口 茂 (SAKAGUCHI, SHIGERU)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50215620

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：有界領域上の楕円型境界値問題の解の一つの等位面が境界に平行ならば、領域は球に限ることを示し、これは、境界に平行な曲面上での解の変化率を最小にするものは球に限られるという等周的性質と考えられる。さらに、その曲面上で解が定数に近ければ領域は球に近いことを示した。また、外部領域上のある楕円型境界値問題の解が境界に相似な等位面を持てば境界は球面に限られることを示した。他方、ある超曲面とこの超曲面から等距離にある2つの超曲面の間にある等距離摂動領域を考える。幾つかの初期境界条件下、元の超曲面が不変等温面ならば球面が平面に限られることを示し、幾つかの新しい問題を提起した。

研究成果の概要(英文)：We show that if a unique solution of an elliptic boundary value problem over a bounded domain has a level surface parallel to the boundary, then the domain must be a ball. This is regarded as a kind of isoperimetric property such that the rate of change of the solution on the surface parallel to the boundary must be minimized at a ball. Moreover, it is shown that, if the solution is nearly a constant on the surface, then the domain is nearly a ball. Also, we show that if a unique solution of an elliptic boundary value problem on an exterior domain has a level surface similar to the boundary, then the boundary must be a sphere. On the other hand, for a hypersurface, we consider the perturbed domain whose boundary consists of two hypersurfaces parallel to the hypersurface at an equal distance. Under some initial and boundary conditions, we show that if the hypersurface is stationary isothermic, then the surface must be either a plane or a sphere. Some new problems are proposed.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：楕円型境界値問題 等距離摂動領域 球対称性 等位集合 幾何学的特性 強比較定理 アレクサンドロフの反射原理

## 様式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

代表者の過去 10 数年に渡る「拡散方程式の解の不変な等温面に関する研究」において、初期値を零、境界値を正定数とする熱方程式の初期境界値問題の解が領域内に不変な等温面を持てば、それは境界に平行であることが知られていて、特に領域が有界である時はその境界は球面に限られることが知られていた。

一方、領域の境界から一定の距離にある平行曲面を境界とする等距離摂動領域と元の領域の対応する物理量（第 1 固有値やねじり剛性等）をそれぞれ比較することは領域の変形に対するアダマルトの変分公式として古くから知られていたが、これのみではあくまでも摂動公式を与えることに限定されていた。

そこで、熱方程式に限らず、線形及び非線形楕円型方程式に対して、領域の等距離摂動領域と元の領域を考え、領域のある制約条件下での解の様々な物理量の変化に対する新しい等周不等式を探索することとその等号を実現する解の幾何学的特性に着目するに至っていた。

### 2. 研究の目的

主な研究目的は、等距離摂動領域に着目し、線形及び非線形楕円型境界値問題に付随する新しい等周不等式を探索・発見しその等号を実現する解の幾何学的特性を明らかにすることである。また、楕円型境界値問題に関連する放物型方程式の解の幾何学的特性も扱う。

### 3. 研究の方法

普段の研究組織内での研究打合せ（電子メールと必要に応じた直接の打合せ）および必要に応じた国内外の研究協力者との討論・情報交換により研究を進めた。そのため主に以下を実施した。

(1) RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の幾何」（H25 年 11 月 20 日から 22 日、京都大学数理解析研究所、京都）を主催した。その際、海外の有力な研究協力者 Daniel Peralta-Salas 研究員（Instituto de Ciencias Matematicas, スペイン）を招聘し、上記研究集会の他に東北大学情報科学研究科へも招聘し、2 週間に渡る全日程で十分な討論・情報交換を行った。

(2) H26 年 2 月 18 日から 22 日にかけて、大韓民国の Inha 大学へ招聘され今までの研究について連続講義を行い、その際、Hyeonbae Kang 教授及び Hyundae Lee 助教授と研究課題で扱う楕円型方程式の解の性質について討論・情報交換を行った。

(3) H26 年 3 月 25 日から 4 月 6 日にかけて

フィレンツェ大学へ出張し海外共同研究者の Rolando Magnanini 教授との直接の討論・情報交換を行った。

(4) 線形楕円型境界値問題と数値物理学の逆問題の専門家である研究協力者の Hyeonbae Kang 教授と Hyundae Lee 助教授（Inha University, 大韓民国）を H26 年 4 月 18 日から 21 日にかけて東北大学情報科学研究科へ招聘し、研究課題で扱う楕円型方程式の解の性質について討論・情報交換を行った。

(5) Brunn-Minkowski 不等式の楕円型偏微分方程式への応用の研究に関する専門家である研究協力者の Andrea Colesanti 准教授（フィレンツェ大学、イタリア）を H27 年 3 月 7 日から 14 日の 1 週間東北大学情報科学研究科へ招聘し、連続講義（幾何と解析セミナー第 3 回、3 月 9 日から 11 日、90 分を 5 回）をしてもらい討論・情報交換を行った。

(6) 等周不等式の楕円型偏微分方程式への応用の研究に関する専門家である研究協力者の Vincenzo Ferone 教授（ナポリ大学、イタリア）を H27 年 4 月 11 日から 18 日の 1 週間東北大学情報科学研究科へ招聘し、連続講義（幾何と解析セミナー第 4 回、4 月 13 日から 15 日、90 分を 5 回）をしてもらい討論・情報交換を行った。

(7) 粘性解理論の専門家である研究協力者の大沼正樹准教授（徳島大学）を H27 年 11 月 26 日から 30 日にかけて東北大学情報科学研究科へ招聘し、研究課題で扱う平均曲率作用素を含む非線形楕円型作用素を主要部とする非線形楕円型方程式の半連続粘性解の強比較定理について集中的に討論・情報交換を行った。

(8) 楕円型方程式の解の定性理論の専門家である Cristian Enache 研究員（IMAR, ルーマニア）を H28 年 2 月と 3 月の 2 ヶ月間東北大学情報科学研究科へ招聘し、研究課題で扱う完全非線形楕円型作用素を主要部とする非線形楕円型方程式の解の正則性等の定性的性質について集中的に討論・情報交換を行った。

(9) 全期間を通じて、必要に応じて、国内外での研究集会等へ出席し、成果発表及び多くの研究協力者との討論・情報交換・情報収集を行った。

### 4. 研究成果

主な研究成果は次のようである。

(1) 等距離摂動領域と線形及び半線形楕円

型ディリクレ境界値問題の解の幾何学的特性について、有界領域上の楕円型境界値問題の解の一つの等位集合が境界に平行ならば、領域は球に限ることをアレクサンドロフの反射原理を用いた平面移動法により示した。また、この副産物として、強比較定理と比較版の Hopf 境界値補題が成り立てば、ある広いクラスの非線形楕円型境界値問題の粘性解についても同様の対称性定理が成り立つことを示した。これらの結果は境界に平行な曲面上での解の変化率を最小(零)にするものは球面に限られるというある種の等周不等式と考えることができる。

(2) (1) の成果に関連して、有界領域上の線形及び半線形楕円型ディリクレ境界値問題の解が境界に平行な一つの曲面上で定数に近ければ領域は球に近いという球の安定性を示した。方法は Aftalion, Busca, & Reichel(1999) による平面移動法に基づく。

(3) 外部領域上のあるクラスの完全非線形楕円型境界値問題の境界上正定数で無限遠で零となる解が境界に相似な等位集合を持つ持てば解は相似の中心について球対称であることを平面移動法を用いて示した。

(4) 熱方程式の初期値問題の解が時刻について1次のオーダーで時刻無限大へ向けて相似な等位集合の列を持つならば、解は相似の中心について球対称であることを平面移動法と調和多項式の空間の性質を用いて示した。

(5) ユークリッド空間内にプロパーに埋め込まれた超曲面とこの超曲面から等距離にある2つの超曲面の間として定まる等距離摂動領域上の熱方程式を様々な初期条件及び境界条件の下で考えて、元の超曲面が時刻に関して不変な等温面ならば、領域の幾何学的特性として、元の超曲面は球面が超平面に限ることを示した。さらに、等距離摂動領域と熱方程式の解の幾何学的特性に関するいくつかの新しい問題を提起することができた。

(6) (1) の後半の成果に関連して、非線形楕円型方程式の解の幾何学的特性を明らかにするために必要な半連続粘性解の強比較定理を指定された平均曲率を持つグラフの方程式に対して証明した。(現在論文を準備中であり、2016年9月関西大学で開催予定の日本数学会秋季総合分科会において成果発表の予定である。)

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1 Shigeru Sakaguchi, Symmetry problems on stationary isothermic surfaces in Euclidean spaces, the Proceedings of the 4th Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic pde's, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, 2016年, 印刷中

2 Giulio Ciruolo, Rolando Magnanini and Shigeru Sakaguchi, Solutions of elliptic equations with a level surface parallel to the boundary: stability of the radial configuration, Journal d'Analyse Mathematique, 査読有, 128-1, 2016年, 337-353 DOI: [10.1007/s11854-016-0011-2](https://doi.org/10.1007/s11854-016-0011-2)

3 Tatsuki Kawakami and Shigeru Sakaguchi, When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 査読有, 194-6, 2015年, 1595-1605 DOI: [10.1007/s10231-014-0435-1](https://doi.org/10.1007/s10231-014-0435-1)

4 Giulio Ciruolo, Rolando Magnanini and Shigeru Sakaguchi, Symmetry of minimizers with a level surface parallel to the boundary, Journal of European Mathematical Society, 査読有, 17-11, 2015年, 2789-2804 DOI: [10.4171/JEMS/571](https://doi.org/10.4171/JEMS/571)

[学会発表] (計9件)

1 Tatsuki Kawakami, When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?, 4th Italian-Japanese Workshop "Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's", 2015年5月25日, Palinuro (イタリア)

2 Tatsuki Kawakami, When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?, 2015 NCTS Workshop on Applied Mathematics, 2015年3月5日, 台北(台湾)

3 川上竜樹, When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?, 研究集会「非線形問題に現れる特異性の解析 (SNP 2014)」, 2014年11月24日, 関西セミナーハウス(京都市)

4 Tatsuki Kawakami and Shigeru Sakaguchi, When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学(広島市)

5 Shigeru Sakaguchi, Fast diffusion and geometry of domain, 日本数学会年会, 2014年3月17日, 学習院大学(東京都)

<sup>6</sup> Shigeru Sakaguchi, Diffusion and geometry of domain, Three lectures at Department of Mathematics in Inha University, 2014年2月19日～2月20日, Inha University (大韓民国)

<sup>7</sup> Shigeru Sakaguchi, Fast diffusion and geometry of domain, 広島微分方程式研究会, 2013年10月12日, 広島大学(東広島市)

<sup>8</sup> Shigeru Sakaguchi, Fast diffusion and geometry of domain, 3rd Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2013年9月6日, 東京工業大学(東京都)

<sup>9</sup> Shigeru Sakaguchi, Fast diffusion and geometry of domain, The 6th Pacific PIM Conference on Mathematics 2013, 2013年7月5日, 札幌コンベンションセンター(札幌市)

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/sigersak2012415/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

坂口 茂 (SAKAGUCHI, SHIGERU)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：50215620

### (3) 連携研究者

神保 秀一 (JIMBO, SHUICHI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：80201565

柴田 徹太郎 (SHIBATA, TETSUTARO)

広島大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：90216010