様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号： １２６０１
研究種目： 挑戦的萌芽研究
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５６１００２５

研究課題名（和文）距離空間上の粘性解

研究課題名（英文）Viscosity solutions on metric spaces

研究代表者
儀我　美一（GIGA, Yoshikazu）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：７０１４４１１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：ネットワークやフラクタルのような関数の勾配という概念が自然に定義できない空間上で、アイコナール方程式を考える。そのため一般距離空間でのアイコナール方程式についての粘性解理論を確立した。また、結晶表面や金属の粒界の形状変化を記述する曲率流方程式、特に異方性の強いクリスタライン曲率流方程式について、その粘性解理論を、表面が曲線とみなせる場合に確立した。異方性の強い曲率流方程式はユークリッド計量以外の計量で面積（長さ）を測った場合の適当な距離空間での勾配流と形式的にみなせる研究対象であるが、一般論の確立はまだ行われていないので、個別に詳しく調べている段階である。

研究成果の概要（英文）：We consider the Eikonal equation in a space such as network or fractal, where the gradient of function is not well-defined in canonical way. We establish the theory of viscosity solutions in a general metric space. We also establish the theory of viscosity solutions for a curvature flow equation describing motion of a surface of a crystal or a grain boundary, especially a crystalline curvature flow, which has a strong anisotropy, when the surface is regarded as a curve. A curvature flow with strong anisotropy is regarded at least formally as a gradient flow of area measured by non-Euclidean metric in a suitable metric space. However, a general theory is not yet established so we study the problem individually.

研究分野： 非線形解析

キーワード： 粘性解　距離空間　ハミルトン・ヤコビ方程式　アイコナール方程式　クリスタライン曲率

１．研究開始当初の背景

(1) 波面の伝播や光の伝播は、ホイヘンスの原理に従っているとされている。この現象を記述する微分方程式として「光」に語源のあるアイコナール方程式がしばしば用いられる。これは今日、最適制御や微分ゲームの値関数を表す方程式と有名なハミルトン・ヤコビ方程式の典型的な例である。通常の空間での波の伝播を考えるのであれば、ユークリッド空間や、より一般の多様体上でアイコナール方程式を考えれば十分である。しかし、例えばソーシャルネットワークやフラクタル上での波の伝播となると、局所的にもユークリッド空間の構造を持っているとは限らないので、そのような図形上でアイコナール方程式 $|\mathrm{grad}\ u| = f$（f は既知関数）をどのように考えればよいかは、基本的ではあり非自明な問題である。そこでユークリッド空間のかわりに、それを含み、ネットワーク、フラクタルも例として含む一般距離空間でアイコナール方程式を考える必要が生じる。

(2) ユークリッド空間の上でのアイコナール方程式でも既にみられる現象であるが、解として捉えたい関数は、しばしば微分不可能なことが多い。そこで、微分不可能な関数をアイコナール方程式の解とみなせるための解概念の拡張が必要であり、それが 1980 年代に M. G. Crandall と P.-L. Lions（フィールズ賞受賞者）により導入され、我が国の石井仁司氏らによりさまざまな改良が加えられた粘性解の概念である。粘性解の概念は既に 1980 年代には、無限次元空間上の方程式については拡張されたが、ネットワーク上への拡張は 2010 年代であった。一方、最適輸送問題に端を発した Wasserstein 距離空間の幾何および解析が近年大きく進展している。この分野に大きく貢献した C. Villani 氏は 2010 年にフィールズ賞を受賞し、我が国でも幾何学的側面に対して大きな成果をあげている太田慎一氏は 2010 年に日本数学会賞を受賞している。このような距離空間上でのハミルトン・ヤコビ方程式はよく用いられているが、その粘性解的概念は当時は不明確であった。

(3) 焼きなまし時の金属の粒界を記述するモデルとして 1956 年に W. W. Mullins により導入された平均曲率流方程式は、応用上だけではなく、微分幾何学のような純粋数学としても重要な方程式である。この方程式は曲面積の減少が最大になるように曲面を法線方向に変形することを要請する方程式であるので、大雑把にいえば、いわゆる勾配流の方程式ではあるが、曲面のなす空間が線形空間ではないので、通常の勾配流の理論は使えない。このため表面構造に強い異方性のあるクリスタライン曲率流方程式のような方程式についての扱いは困難であった。一方で距離空間上での勾配流方程式の一般論は構築されているが、それを曲率流方程式に適用することは困難であった。

２．研究の目的

(1) ネットワーク上の交通流の問題や、ソーシャルネットワーク上の問題、またフラクタル上の問題を扱うために、一般距離空間上でのアイコナール方程式の粘性解理論を構築する。一般距離空間では関数の勾配 $\mathrm{grad}\ u$ は定義できない。なぜならば、微分の方向が定義できないからである。勾配の大きさ $|\mathrm{grad}\ u|$ を適切に定義し、アイコナール方程式の粘性解理論を構築することを目指す。

(2) 曲率流方程式、特に曲面積を測る計量が、いわゆるミンコフスキー計量によるといった異方性を持った場合の曲率流方程式、特にクリスタライン曲率流方程式について、その解を追跡できる適切な粘性解の概念を導入し、解を構成する。

(3) さらに、従来あまり扱われてこなかった高階の曲率流方程式をはじめ、さまざまな曲率流方程式を研究し、一般距離空間上の勾配流とみなせるかどうかを調べる。

３．研究の方法

(1) 初年度：それぞれのテーマについて、大学院生を研究協力者として、問題点の抽出を行う。最新の情報に常に接しておくことは、解の定義をどのようにしたら有益かという問題に直結するため、国内における粘性解関係および発展方程式関係の研究会に出席し、情報を収集する。

(2) 2 年目：本研究の理論の有効性を検討するために、支援員を一時期雇用して、さらに研究体制の充実をはかる。

(3) 3 年目：初年度、2 年目に得た成果を取りまとめ、今後のさらなる展開を模索する。また成果をさまざまな学会等で報告する。

４．研究成果

(1) **不連続な外力を持つハミルトン・ヤコビ方程式：**距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式を扱えるようにすることは重要であるが、ハミルトニアンが空間変数に対して不連続な場合を考えるとなると、ユークリッド空間の解析の準備が必要である。ユークリッド空間上の点源を外力とする不連続性の強いハミルトニアンを持つハミルトン・ヤコビ方程式について粘性解理論を確立し、鍵となる比較定理、存在定理を導いた。この問題はホイヘンスの原理でいえば、波の発生源を与えて、それがどのように伝播していくかという問題を記述しているモデルとも捉えられる。当時大学院生であった浜向直氏（現・北大助教）との共同研究である。

(2) **曲率流方程式：**クリスタライン曲率流方程式は結晶表面のように平らな面（ファセット）がある場合の結晶表面の運動を記述するモデルとして用いられている。結晶表面が関数のグラフで与えられている場合でも、駆動力項が空間的に非一様な場合は、粘性解理論の構築は不十分であった。そこで、一般の初期値問題に対して粘性解の一意存在性を示した。当時大学院生であった中安淳氏（現・東大特任助教）および儀我美保氏（東大特任研究員）との共同研究である。

(3) **表面拡散流方程式：**4 階の曲率流である表面拡散流方程式を捉えるために、古典的な問題である熱溝の生成問題について、自己相似解、またその安定性について考察した。この問題は材料科学者である W. W. Mullins 氏により 1957 年に提示された古典的な問題である。具体的には、空間 1 次元の問題を半空間で考え、端での溝の角度を与える。解を一変数関数のグラフとして与える。方程式が 4 階であるため、2 つ目の境界条件として「3 階微分が境界上でゼロ」という条件を課す。これは物理的な境界条件である「流量ゼロ」を線形化した条件である。この問題を、有界な初期値を与えて解く問題を考えた。この初期値問題をヘルダー空間で解くことにより、有界自己相似解の存在、一意性とその安定性を、溝が浅い場合に初めて厳密に示した。技術的には整合しない初期値についての存在定理で、従来の「初期値の正則性」を多く必要とした点を大幅に改善した。当時特任研究員であった浅井智朗氏との共同研究である。

(4) **アイコナール方程式：**一般距離空間上のアイコナール方程式に対して、その粘性解理論を確立した。具体的には、解の定義を適切に与えることにより、$|\mathrm{grad}\, u| = f$ の領域での境界値問題の解の存在、比較定理、従来の解概念との整合性を f が下から正数でおさえられるという条件の下に示した。この理論が元となり、距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式という分野が創設されつつある。本研究は浜向直氏と中安淳氏との共同研究である。研究協力者である中安淳氏は、この理論をさらに発展型方程式に拡張している。

(5) クリスタライン曲率流方程式：成果 (2) に関連するが、曲線が関数のグラフではなく、多角形に近い形の場合の形状がみえやすい解を構成して、その一意性を証明した。ポーランドの研究者らとの共同研究であるその他曲率流方程式関係や、全変動方程式に対しても、いくつか成果をあげている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計６件）

① Y. Giga, N. Hamamuki and A. Nakayasu, Eikonal equations in metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有, **367**, 2015, 49-66
DOI: 10.1090/S0002-9947-2014-05893-5

② T. Ohtsuka, T.-H R. Tsai and Y. Giga, A level set approach reflecting sheet structure with single auxiliary function for evolving spirals on crystal surfaces, Journal of Scientific Computing, 査読有, **62**, 2015, 831-874
DOI: 10.1007/s10915-014-9877-2

③ Y. Giga and H. Kuroda, A counterexample to finite time stopping property for one-harmonic map flow, Comm. Pure Appl. Anal., 査読有, **14**, 2015, 121-125
DOI: 10.3934/cpaa.2015.14.121

④ Y. Giga, P. Gorka and P. Rybka, Bent rectangles as viscosity solutions over a circle, Nonlinear Analysis, 査読有, **125**, 2015, 518-549
DOI: 10.1016/j.na.2015.05.033

⑤ T. Asai and Y. Giga, On self-similar solutions to the surface diffusion flow equations with contact angle boundary conditions, Interfaces and Free Boundaries, 査読有, **16**, 2014, 539-573
DOI: 10.4171/IFB/329

⑥ M.-H. Giga, Y. Giga and A. Nakayasu, On general existence results for one-dimensional singular diffusion equations with spatially inhomogeneous driving force, Proc. ERC Workshop on "Geometric Partial Differential Equations" (eds. M. Novaga et al.), Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, 査読有, **15**, 2013, 145-170
DOI: 10.1007/978-88-7642-473-1_8

〔学会発表〕（計６件）

① 儀我美一, 曲面のクリスタライン曲率流に対する等高面法, 談話会, 2015 年 11 月 30 日, 東北大学大学院理学研究科（宮城県・仙台市）

② Y. Giga, A level-set flow by crystalline mean curvature of surfaces, Anisotropy 2015, 2015 年 10 月 15 日, ワルシャワ（ポーランド）

③ Y. Giga, On large time behavior of solutions to a level set eikonal mean curvature flow equation with source terms for nucleation, The Hamilton-Jacobi Equation: At the crossroads of PDE, dynamical systems & geometry, 2015 年 6 月 24 日, コルトナ（イタリア）

④ <u>Y. Giga</u>, A level-set crystalline mean curvature flow, Special Analysis Seminar, 2015年6月11日, エスポー（フィンランド）

⑤ <u>Y. Giga</u>, Boundary integrals involving the mean curvature for mean convex domain, International Workshop on PDEs and Related Topics in Nonlinear Problems, 2014年2月11日, 広島大学（広島県・東広島市）

⑥ <u>Y. Giga</u>, Total variation flow of non-divergence type in multi-dimensional spaces and related topics, Quasilinear PDEs and game theory, 2013年12月4日, ウプサラ（スウェーデン）

６．研究組織
(1)研究代表者
儀我　美一（GIGA, Yoshikazu）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：７０１４４１１０

(2)研究協力者
浅井　智朗（ASAI, Tomoro）

大塚　岳（OHTSUKA, Takeshi）

儀我　美保（GIGA, Mi-Ho）

黒田　紘敏（KURODA, Hirotoshi）

中安　淳（NAKAYASU, Atsushi）

浜向　直（HAMAMUKI, Nao）